BIDANG PENDIDIKAN DAN PENGAJARAN :

BERITA ACARA PERKULIAHAN

SEMESTER GENAP 2023/2024

ALJABAR LINIER KLS.A/ 2 SKS

LAMPIRAN BERITA ACARA PERKULIAHAN :

1. SK Dekan
2. Presensi Kehadiran Kuliah Mahasiswa
3. Hasil Evaluasi Belajar Mahasiswa
4. Hand-out Bahan Ajar

Program Studi Teknik Industri
Fakultas Teknik
Institut Sains dan Teknologi Nasional
J a k a r t a
2 0 2 4

YAYASAN PERGURUAN CIKINI

INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL

Jl. Moh. Kahfi II, Bhumi Srengseng Indah, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12640
Telp. 021-7270090 (hunting), Fax 021-7866955, hp: 081291030024
Email: humas@istn.ac.id Website: www.istn.ac.id

SURAT PENUGASAN TENAGA PENDIDIK

Nomor 48 - VI / 03.1-F/III/2024

SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 2023/2024

Nama	Ir. Harwan Ahyadi.MT	Status Pegawai	Tetap
NIK/ NIDN/ NIDK	0188779	Program Studi	Teknik Industri S1
Jabatan Akademik	Lektror Kepala		

Bidang	Perincian Kegiatan	Tempat	Jam	Kredit (SKS)	Hari
I. PENDIDIKAN & PENGAJARAN	**1. Pengajaran di kelas termasuk laboratorium**				
	1. Kalkulus 2 (K)		10:00-12:10	2	Selasa
	2. Aljabar Linier (K)		13:00-14:40	2	Rabu
	3. Perencanaan dan Pengembangan Produk (K)		08:00-10:00	2	Selasa
	4. Perencanaan dan Pengembangan Produk		20:00-20-50	2	Kamis
	5. Analisa Vektor		13:00-14:40	2	Rabu
	2. Pembimbing				
	1. Seminar			1	
	2. Kerja Praktek			1	
	3. Tugas Akhir/Tesis			1	
	4. Pembimbing Akademik				
	3. Penguji				
	1. Tugas Akhir/Tesis			1	
	2. Kerja Praktek				
	4. Tugas Tambahan				
	1. Menduduki jabatan di Perguruan Tinggi				
II. PENELITIAN	1. Penelitian Ilmiah				
	2. Penulisan Karya Ilmiah			1	
	3. Penulisan Diktat Kuliah				
	4. Menerjemahkan Buku Kuliah				
	5. Pengembangan Program Kuliah Kurikulum				
	6. Pengembangan Bahan Ajar				
III. PENGABDIAN PADA MASYARAKAT	1. Menduduki jabatan di Pemerintahan				
	2. Pengembangan Hasil Pendidikan dan Penelitian				
	3. Memberikan penyuluhan/pelatihan/penataran/ceramah			1	
	4. Memberikan Pelayanan Kepada Masyarakat				
	5. Menulis karya Pengmas yang tidak dipublikasikan				
	6. Pengelolaan Jurnal Ilmiah				
IV. PENUNJANG	1. Menjadi anggota/panitia pada badan/lembaga suatu PT				
	2. Menjadi anggota Badan Lembaga Pemerintah				
	3. Menjadi anggota organisasi profesi				
	4. Mewakili PT/lembaga pemerintah, duduk dalam panitia antar lembaga				
	5. Menjadi anggota delegasi nasional ke pertemuan internasional				
	6. Berperan Serta Aktif dalam pertemuan ilmiah/seminar				
	7. Anggota dalam tim layanan pendidikan				
Jumlah Total				16	

Kepada yang bersangkutan akan diberikan gaji/honorarium sesuai dengan peraturan penggajian yang berlaku di Institut Sains dan Teknologi Nasional.

Jakarta, [illegible] Maret 2024

Dr. Ir. Endang Widjajanti, MT

Tembusan :
1. Wakil Rektor 1 - ISTN
2. Wakil Rektor 2 - ISTN
2. Ka. Biro Sumber Daya Manusia - ISTN
3. Kepala Program Studi Teknik Sipil
4. Arsip

INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL

Jl. Moch. Kahfi II No.RT.13, RT.13/RW.9, Srengseng Sawah, Kec. Jagakarsa, Kota Jakarta Selatan, DKI Jakarta
Website : www.istn.ac.id / e-Mail : admin@istn.ac.id / Telepon : (021) 7270090

JURNAL PERKULIAHAN
TEKNIK INDUSTRI S1 2023 GENAP

MATA KULIAH : Aljabar Linier
NAMA DOSEN : Ir. HARWAN AHYADI, MT.
KREDIT/SKS : 2 SKS
KELAS : A

TATAP MUKA KE	HARI/TANGGAL	MULAI	SELESAI	RUANG	STATUS	RENCANA MATERI	REALISASI MATERI	KEHADIRAN MHS	PENGAJAR	TANDA TANGAN
1	Rabu, 13 Maret 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	.Pendahuluan,Rps,Tata tertip perkuliahan	· Vektor	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
2	Rabu, 20 Maret 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	Penjumlahan,perkalian vektor dot dan cross	Penjumlahan,perkalian vektor dot dan cross	(7 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
3	Rabu, 27 Maret 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	Menjelaskan berbagai macam matriks dan contohnya	Menjelaskan matriks dan menyelesaikan contoh -contoh dan penyelesaian	(7 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
4	Rabu, 3 April 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	· Penyelesaian soal-soal Matriks	· Penyelesaian soal-soal Matriks	(4 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
5	Rabu, 17 April 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	SPL	SPL	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
6	Rabu, 24 April 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	metode laplace	metode laplace Bahan pembelajaran yang telah dibagikan adalah Pertemuan ke 6	(4 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
7	Rabu, 8 Mei 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	UTS	UTS	(6 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
8	Rabu, 15 Mei 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	UTS	UTS	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	

INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL

Jl. Moch. Kahfi II No.RT.13, RT.13/RW.9, Srengseng Sawah, Kec. Jagakarsa, Kota Jakarta Selatan, DKI Jakarta
Website : www.istn.ac.id / e-Mail : admin@istn.ac.id / Telepon : (021) 7270090

JURNAL PERKULIAHAN
TEKNIK INDUSTRI S1 2023 GENAP

MATA KULIAH : Aljabar Linier
NAMA DOSEN : Ir. HARWAN AHYADI, MT.
KREDIT/SKS : 2 SKS
KELAS : A

TATAP MUKA KE	HARI/TANGGAL	MULAI	SELESAI	RUANG	STATUS	RENCANA MATERI	REALISASI MATERI	KEHADIRAN MHS	PENGAJAR	TANDA TANGAN
9	Rabu, 22 Mei 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	Linier Independent dan Dependent	Linier Independent dan Dependent	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
10	Rabu, 29 Mei 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	Persamaan linier	Persamaan linier	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
11	Rabu, 5 Juni 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	SPL	SPL	(7 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
12	Rabu, 12 Juni 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	Transformasi linier	Transformasi linier	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
13	Rabu, 19 Juni 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	Eigen Vektor	Eigen Vektor	(5 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
14	Rabu, 26 Juni 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	transformasi linier	transformasi linier	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
15	Rabu, 3 Juli 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	TUGAS MANDIRI	TUGAS MANDIRI	(8 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	
16	Rabu, 10 Juli 2024	13:00	14:40	R-C1	Selesai	UAS	UAS	(7 / 8)	Ir. HARWAN AHYADI, MT.	

Jakarta Selatan, 13 Agustus 2024
Ketua Prodi Teknik Industri S1

NATAYA CHAROONSRI RIZANI, ST., MT.
NIDN 0303017604

INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL

Jl. Moch. Kahfi II No.RT.13, RT.13/RW.9, Srengseng Sawah, Kec. Jagakarsa, Kota Jakarta Selatan, DKI Jakarta
Website : www.istn.ac.id / e-Mail : admin@istn.ac.id / Telepon : (021) 7270090

NILAI PERKULIAHAN MAHASISWA

PRODI : TEKNIK INDUSTRI S1
PERIODE : 2023 GENAP

Mata kuliah : Aljabar Linier — Nama Kelas : A
Kelas / Kelompok :
Kode Mata kuliah : 22321PTI08 — SKS : 2

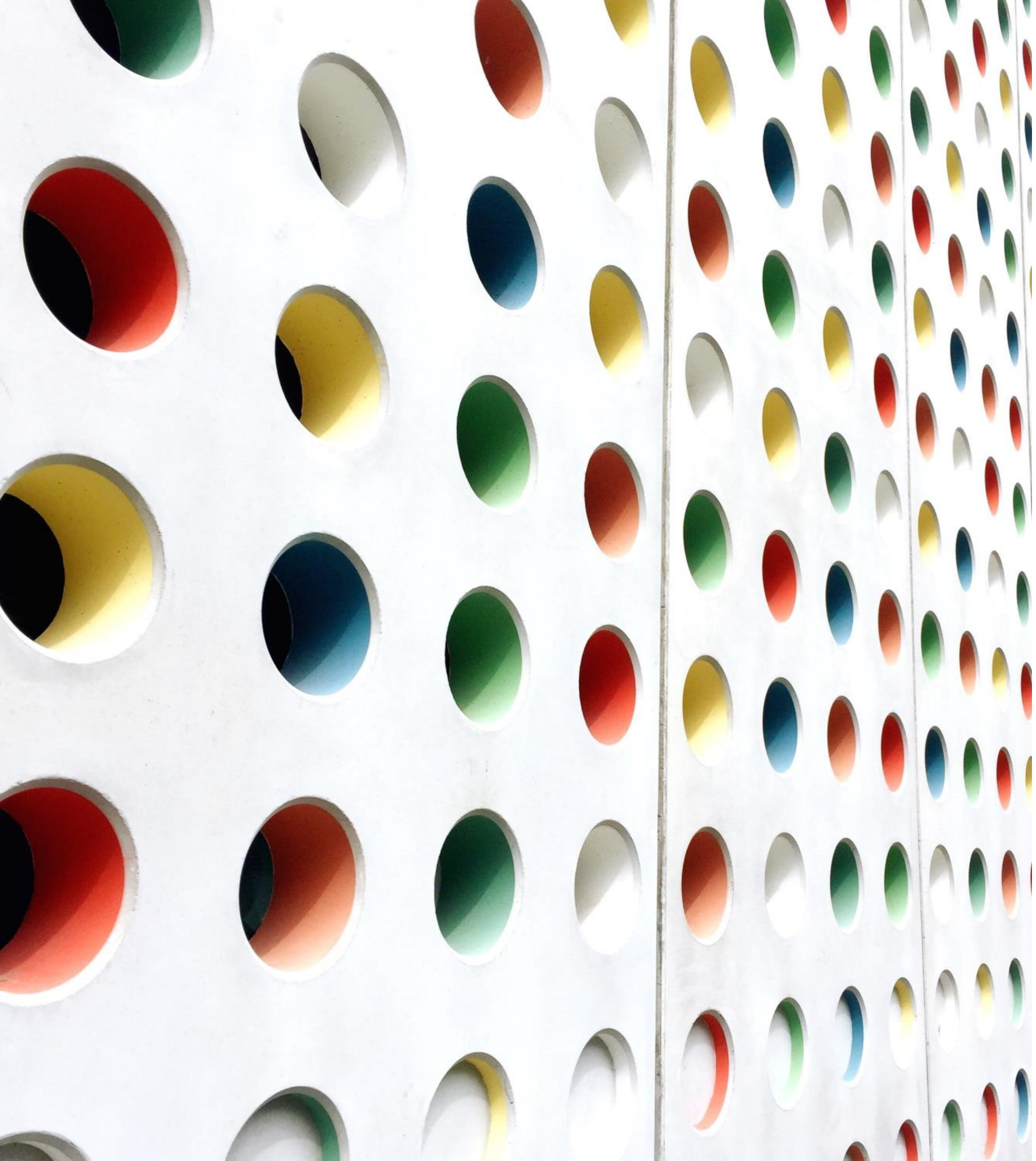
No	NIM	Nama Mahasiswa	TUGAS INDIVIDU (20%)	UTS (40%)	UAS (40%)	Nilai	Grade	Lulus	Sunting KRS?	Info
1	22230001	ALVAN AGESA PUTRA	80.00	80.00	90.00	84.00	A	✓		
2	22230002	DEVI NUR APRILIA	80.00	100.00	90.00	92.00	A	✓		
3	23230001	MUHAMMAD GAVIANDRA SETIANTO	80.00	80.00	78.00	79.20	A-	✓		
4	23230002	TAUFIQ FIRDAUS HERIANTO	75.00	75.00	75.00	75.00	A-	✓		
5	23230003	YOHANES PESAU NTALUNG	75.00	75.00	75.00	75.00	A-	✓		
6	23230004	NAJWA AZIZAH								
7	23230005	FILLAH ALFA RENO	67.00	75.00	75.00	73.40	B+	✓		
8	23230006	KEHAN MUHAMMAD FAHREZA	75.00	75.00	75.00	75.00	A-	✓		
Rata-rata nilai kelas			**66.50**	**70.00**	**69.75**	**69.20**	**3.26**			

Pengisian nilai untuk kelas ini ditutup pada **Rabu, 31 Juli 2024** oleh **198808-002**

Tanggal Cetak : Senin, 19 Agustus 2024, 11:55:59

Paraf Dosen :

Ir. HARWAN AHYADI, MT.



AL-JABAR LINIER

MATRIKS

HARWAN AHYADI

Silabi matriks dan vektor

1. Pendahuluan

1.2 Operasi matriks
- Kesamaan dua matriks
- Penjumlahan dua matriks
- Perkalian matriks dengan sebuah bilangan
- Perkalian dua buah matriks

1.3. Macam-macam matriks
- Matriks bujur sangkar
- Matriks echelon
- Matriks segitiga dan diagonal
- Matriks transpos
- Matriks skew symetri

1.4.Matriks Adjoin

- 1.5.matriks Invers

Macam-Macam Matriks

1.Matriks Bujur Sangkar.

Difinisi: Sebuah matriks disebut matriks bujur sangkar, jika banyaknya baris dan banyaknya kolom sama.

Contoh: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

TYPE MATRIKS BUJUR SANGKAR

Matriks Satuan (unit matriks). Jika elemen-elemen diagonal sama dengan 1 dan elemen-elemen yang lain sama dengan nol.

Disebut juga matriks identitas = [I]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\ I\ ]$$

TYPE MATRIKS BUJUR SANGKAR

Matriks simetris, jika $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks skew-simetris, jika $a_{ij} = - a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Satuan

Matriks Satuan adalah matrik yang terdiri dari diagnal mempunyai nilai satu

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

3.Matriks Tranpose:

Matriks Tranpose **adalah matriks yang berubah dari baris menjadi kolom,dan kolom menjadi baris**

$$a_{ij} \text{ menjadi } a_{ji}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ menjadi } A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4.Matriks Adjoin

Matriks Adjoin adalah matriks transpose dari kofaktor

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \text{diuraikan menjadi matriks - matriks kofaktor}$$

$$C = \begin{vmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{vmatrix} \text{menjadi matriks transpose}$$

$$C^T = \begin{vmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

INVERS MATRIKS BUJUR SANGKAR

Matriks tidak bisa dibagi dengan matriks lainnya. Sebagai analogi, digunakan INVERSE dari matriks tersebut.

Apabila [A] dan [B] adalah matriks bujur sangkar, dan [A] [B] = [I] = [B] [A], maka

matriks [B] disebut inverse dari matrix [A], dan matriks [A] adalah inverse dari matriks [B].

Selanjutnya [A] disebut matriks <u>NON SINGULAR</u>

Bila [A] tidak punya inverse disebut matriks SINGULAR.

Inverse dari matriks [A] biasa ditulis $[A]^{-1}$

EXAMPLE :

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A]\ [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\ I\ ]$$

Catatan :

Untuk mencari inverse suatu matrix dapat dipakai beberapa metoda, antara lain : metode ad-joint, metode pemisahan, metode Gauss-Jordan, metode Cholesky, dsb.

5.Matriks Invers:

Dari soal diatas: harga matrik

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 45$$

maka invers dari matriks tersebut :

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet C^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{45} \begin{vmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Metode Gauss-Jordan

Akan dicari inversi dari matriks $[A]_{nxn}$

Langkah-langkah yang dilakukan :

1) Ambil matriks satuan $[I]_{nxn}$

2) Dengan cara operasi baris, ubahlah matriks [A] menjadi matriks satuan

3) Proses ke-2 juga dilakukan pada matriks [I], sehingga setelah proses selesai matriks [I] telah berubah menjadi matriks $[A]^{-1}$

EXAMPLE :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LANGKAH KE-1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

LANGKAH KE-2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

LANGKAH KE-3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

LANGKAH KE-4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

LANGKAH KE-5

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

LANGKAH KE-n

Selesai …?????

Matriks Echelon

Difinisi: Suatu matriks berukuran m x n dinamakan

matriks echelon jika memenuhi dua sifat:

1. Setiap baris dari k baris pertama mempunyai unsur tak nol,dimana $1<k<m$, dan semua unsur pada (m-k) baris lainnya =0

2. Unsur tak nol pertama dari setiap baris tak nol (yaitu baris-baris dimana tidak semua unsurnya nol) adalah 1; jika bilangan 1 dari baris ke l ($1 < l < k$) terletak pada kolom ke ti maka $t1 < t2 < \ldots < tk$

Contoh 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -1 & 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & d & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b & -3 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dimana a,b,c,dan d adalah bilangan sebarang ,adalah merupakan matriks echelon.
- Dimana a,b,d dan e adalah bilangan sebarang,bukan matriks echelon,karena pada baris kedua angka 1 terletak di kolom 4.
- Jadi $t1=2, t2=4, t3=3$ dan $t4=5$ yang dalam hal ini memenuhi
- $t1 < t2 < t3 < t4$

Matriks segitiga dan matriks diagonal.

Difinisi: sebiuah matriks bujur sangkar disebut matriks segitiga apabila semua unsur yang terletak dibawah diagonal utama adalah nol

Contoh.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Contoh 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pada contoh 2 tsb yang pertama adalah matriks echelon bujur sangkar, sedangkan yang kedua adalah matriks echelon segitiga.

MATRIKS ORTHOGONAL

Suatu matriks bujur sangkar [A] disebut matriks orthogonal

bila $[A]^{-1} = [A]^T$

$$[A]\ [A]^T = [A]\ [A]^{-1} = [\ I\ ]$$

EXAMPLE :

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad [A]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Karena $[A]^{-1} = [A]^T \rightarrow$ matriks [A] disebut matriks orthogonal

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena $[T]^{-1} = [T]^T \rightarrow$ matriks [T] disebut matriks orthogonal

TEORI DEKOMPOSISI MATRIKS

Bila [A] = sebuah matrix bujur sangkar maka matriks tersebut dapat diekspresikan dalam bentuk :[A] = [L] [U]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \ldots. & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ldots. & 0 \\ . & . & . & \ldots. & . \\ . & . & . & \ldots. & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots. & l_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{i2} & u_{13} & \ldots. & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots. & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \ldots. & u_{3n.} \\ . & . & . & \ldots. & . \\ . & . & . & \ldots. & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots. & u_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

[L] = *lower triangle matriks*
[U] = *upper triangle matriks*

EXAMPLE :

$$\begin{bmatrix} 36 & 27 & -63 \\ 20 & 25 & -39 \\ 12 & 14 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

[A] = [L] [U]

∴ Aplikasi pada solusi persamaan linier simultan :

[A] {X} = [B]

∴ [L] [U] {X} = [B] → misal [U] {X} = {Y}

[L] {Y} = [B]

{X} = [U]$^{-1}$ {Y}

dapat diperoleh tanpa inverse matriks

{Y} = [L]$^{-1}$ [B]

dapat diperoleh tanpa inverse matriks

Sehingga : {X} = [U]$^{-1}$ [L]$^{-1}$ [B]

SOLUSI PERSAMAAN LINIER SIMULTAN

Persamaan Linier Simultan dengan $\boldsymbol{n}$ buah bilangan tak diketahui dapat dituliskan sbb :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & \ldots\ldots\ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & \ldots\ldots\ldots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
. & & & . & & & \ldots\ldots\ldots & & . & & & . \\
. & & & . & & & \ldots\ldots\ldots & & . & & & . \\
. & & & . & & & \ldots\ldots\ldots & & . & & & . \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & \ldots\ldots\ldots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{21} & \ldots. & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\
. & . & \ldots. & . \\
. & . & \ldots. & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{Bmatrix}
$$

Secara matriks ditulis, [A] {X} = [B]

EXAMPLE :

$$4x + 3y + z = 13$$
$$x + 2y + 3z = 14$$
$$3x + 2y + 5z = 22$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 14 \\ 22 \end{Bmatrix}$$

$$[\ A\ ] \quad \{\ X\ \} = [\ B\ ]$$

$$\{\ X\ \} = [A]^{-1}[B]$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 13 \\ 14 \\ 22 \end{Bmatrix} = \text{.....??????}$$

PARTISI MATRIKS

Suatu matriks bisa dipartisikan menjadi SUB-MATRIKS dengan cara hanya mengikutkan beberapa baris atau kolom dari matriks aslinya.

Aturan-aturan yang dipakai untuk mengoperasikan matriks partisi persis sama dengan mengoperasikan matriks biasa

$$[A] = \left[\begin{array}{c:cccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right]$$

dimana ;

$$[A_{11}] = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} \qquad [A_{12}] = \begin{Bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Bmatrix} \qquad [A_{13}] = \begin{Bmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{Bmatrix}$$

$$[A_{21}] = \{a_{31}\} \qquad [A_{22}] = \{a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34}\} \qquad [A_{23}] = \{a_{35} \quad a_{36}\}$$

EXAMPLE :

$$[A]=\left[\begin{array}{cc:c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hdashline 10 & 3 & 4 \end{array}\right]_{3x3} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{2x2} \qquad [B]=\left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hdashline 3 & 2 \end{array}\right]_{3X2} = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]_{2x1}$$

$$[A][B] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{2x2} \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]_{2x1} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{11}][B_1] = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix}$$

$$[A_{12}][B_2] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A_{21}][B_1] = \begin{Bmatrix} 10 & 3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 32 \end{bmatrix}$$

$$[A_{22}][B_2] = \{4\} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}$$

sehingga ; $[A][B] = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}$

BEBERAPA RUMUS KHUSUS

[A] = Matriks bujur sangkar dan simetris ; orde $n \times n$: a_{ij}

[B] = Matriks empat persegi panjang ; orde $n \times m$: b_{ij}

{ X } = Vektor kolom ; orde $n \times 1$: x_i

{ Y } = Vektor kolom ; orde $m \times 1$; y_i

Bila ;

$$\Phi = ½\{X\}^T_{1xn}[A]_{nxn} = ½\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{X\}} = [A][X] \quad ; \quad \Phi = ½\{X\}^T[A]\{X\}$$

Maka ;

$$\frac{\partial}{\partial}\frac{\Phi}{\{X\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial}\frac{\Phi}{x_1} \\ \frac{\partial}{\partial}\frac{\Phi}{x_2} \\ \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \\ \frac{\partial}{\partial}\frac{\Phi}{x_n} \end{Bmatrix} = [A]_{nxn}\{X\}_{nx1}$$

atau sebaliknya ;

EXAMPLE :

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix} \qquad (X)=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\{X\}^T[A]\{X\} = \tfrac{1}{2}\{x_1 \quad x_2 \quad x_3\}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\,(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{Bmatrix}x_1 + 2x_2 + 3x_3\\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3\\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3\end{Bmatrix}$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 1/2(2x_1 + 4x_2 + 6x_2) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 1/2(8x_2 + 4x_1 + 10x_3) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 1/2(12x_3 + 6x_1 + 10x_2) = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad \rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \{X\}} = [A]\{X\}$$

Bila ; $$\psi = \{X\}^T_{1xn}[B]_{nxm}\{Y\}_{mx1}$$

Maka ; $$\frac{\partial \psi}{\partial \{X\}} = [B]_{nxm}\{Y\}_{mx1}$$

EXAMPLE :

$$[B]_{3x4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \{X\}_{3x1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad \{Y\}_{4x1} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\psi = \{X\}^T[B]\{Y\} = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\psi = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\} \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \\ 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 8y_4 \\ 9y_1 + 10y_2 + 11y_3 + 12y_4 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \{ (y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4)\, x_1 + (5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 8y_4)\, x_2 + (9y_1 + 10y_2 + 11y_3 + 12y_4)\, x_3 \}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 8y_4$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 9y_1 + 10y_2 + 11y_3 + 12y_4$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial \{X\}} = [B]\{Y\}$$