











**Program Studi Teknik Mesin  
Fakultas Teknologi Industri  
Institut Sains dan Teknologi Nasional  
Semester Genap 2020-2021**

KODEMK	:	212012
MATAKULIAH	:	<b>Analisa Vektor</b>
KELAS	:	A
PESERTA	:	12
KURIKULUM	:	2018
PROGRAM STUDI	:	Teknik Mesin S1
PROGRAM PERKULIAHAN	:	Kampus ISTN Bumi Srengseng Indah
PERIODE AKADEMIK	:	Genap 2020/2021 Reguler
DOSEN	:	1. Harwan Achyadi , Ir. MT 2. Bambang Setiadi, S.T.,M.T.
JADWAL	:	Kamis - 10:00-11:40 ( )



**BERITA ACARA PERKULIAHAN**  
(PRESENTASI KEHADIRAN DOSEN)  
SEMESTER GENAP TAHUN AKADEMIK 2020/2021  
PROGRAM STUDI TEKNIK MESIN S.1 & D.III -ISTN

Mata Kuliah : Analisa Vektor	Semester : 2
Dosen : Bambang Setiadi	SKS : 2
Hari : Kamis	Kelas : A)
Jam : 10:00-11:40 ( )	Ruang : Daring (Online )

No.	TANGGAL	MATERI KULIAH	JML MHS HADIR	TANDA TANGAN DOSEN
1.	20/05/2021 (pertemuan ke 9)	Review Vektor & skalar serta perkalian vektor	2	
2.	27/05/2021 (pertemuan ke 10)	Pembahasan Tugas tentang aplikasi vektor	2	
3.	3 /06/2021 (pertemuan ke 11)	Bilangan Kompleks	2	
4.	10 /06/2021 (pertemuan ke 12)	vektor arah garis lurus	2	
5.	17/06/2021 (pertemuan ke 13)	proyeksi ortogonal suatu vektor ke vektor lain	2	
6.	24 /06/2021 (pertemuan ke 14)	luas permukaan dan bangun Ruang	2	
7.	1 /07/2021 (pertemuan ke 15)	Analisis struktur	2	
8.		UJIAN AKHIR SEMESTER (UAS)	2	

DOSEN PENGAJAR

  
(Bambang Setiadi, ST. MT.)

# DAFTAR NILAI

## SEMESTER GENAP REGULER TAHUN 2020/2021

Program Studi : Teknik Mesin S1

Matakuliah : Analisa Vektor

Kelas / Peserta : A

Perkuliahan : Kampus ISTN Bumi Srengseng Indah

Dosen : Harwan Achyadi, Ir.MT.

Hal. 1/1

No	NIM	N A M A	ABSEN	TUGAS	UTS	UAS	MODEL	PRESENTASI	NA	HURUF
			10%	20%	30%	40%	0%	0%		
1	15210006	Virell Johnworry Borlak	100	0	0	0	0	0	0	
2	15210026	Muhammad Riffat Fadhillah	100	75	70	85	0	0	80	A
3	16210021	Syarul Ridho Fauzi	100	70	80	85	0	0	82	A
4	16210035	Salman Alfarisyi	93	75	70	85	0	0	79.3	A-
5	17210001	Oktario Leonardy	93	75	80	85	0	0	82.3	A
6	17210004	Muhammad Febryan Syawali	93	75	70	85	0	0	79.3	A-
7	17210005	Muhammad Iqbal Fauzi	100	80	90	85	0	0	87	A
8	17210010	Muammar Ibnu Rafik	100	80	90	85	0	0	87	A
9	17210013	Muhadzdzib Haekal Bazarah	100	78	90	85	0	0	86.6	A
10	17210014	Eki Aditiyo Pratomo	100	78	90	85	0	0	86.6	A
11	17210015	Wahyu Belvia	100	75	80	85	0	0	83	A
12	20210002	Hafizh Adiya Pratama	100	78	90	80	0	0	84.6	A

Rekapitulasi Nilai							
A	9	B+	0	C+	0	D+	0
A-	2	B	0	C	0	D	0
		B-	0	C-	0	E	0

Jakarta, 2 August 2021

Dosen Pengajar

**Harwan Achyadi, Ir.MT.**



# Analisa Vektor

Bambang Setiadi, ST.MT

PROGRAM STUDI TEKNIK MESIN  
PROGRAM Sarjana  
FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI  
INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL  
2021



materi



# Bilangan Kompleks▶▶

---

Arti geometri dari bilangan kompleks dalam beberapa hal dapat dipahami sebagai **vektor di bidang**.

Secara umum, setelah ini Anda diharapkan dapat memahami:

- a. operasi aljabar pada sistem bilangan kompleks;
- b. sifat dan arti geometri dari bilangan kompleks.

## Aljabar Bilangan Kompleks ▶▶

Bilangan kompleks adalah **pasangan terurut** dari dua bilangan real  $x$  dan  $y$ , yang dinyatakan oleh  $(x, y)$ .

Bilangan kompleks dilambangkan oleh huruf  $z = (x, y)$

**Bilangan real  $x$**  disebut bagian real dari  $z$ , ditulis  **$Re(z)$**

**Bilangan real  $y$**  disebut bagian imajiner dari  $z$ , ditulis  **$Im(z)$** .

Beberapa pasangan terurut diidentifikasi secara khusus, yaitu:

$(x, 0) = x$ , merupakan **bilangan real**;  
 $(0, 1) = i$ , dinamakan **satuan imajiner**.

## Kesamaan dua bilangan kompleks ►►

Dua bilangan kompleks  $z_1=(x_1,y_1)$  dan  $z_2=(x_2,y_2)$  dikatakan **sama**, ditulis  $z_1=z_2$ , jika  $x_1=x_2$  dan  $y_1=y_2$ . Khususnya  $z=(x,y)=(0,0)$  jika dan hanya jika,  $x=0$  dan  $y=0$ .



## Operasi penjumlahan dan perkalian dua bilangan kompleks

Jika  $z_1 = (x_1, y_1)$  dan  $z_2 = (x_2, y_2)$  adalah bilangan kompleks, maka **jumlah** dan **hasil kali**  $z_1$  dan  $z_2$ , masing-masing adalah bilangan kompleks  $z_1 + z_2$  dan  $z_1 z_2$  yang diberikan oleh aturan berikut,

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$



Pada bagian berikut, Anda akan diperkenalkan pada suatu penulisan lain dari bilangan kompleks  $z=(x, y)$ . Dengan identifikasi  $x=(x, 0)$  dan  $i=(0, 1)$

$(0, y)=(0, 1) \cdot (y, 0)=iy$ , disebut bilangan imajiner sejati,

$$\begin{aligned} z=(x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= x + iy \\ &= x + yi \end{aligned}$$

dengan,

$x$  dan  $y$  bilangan real,  $i^2 = -1$

$x$  disebut bagian real dari  $z$ , ditulis  $x=\text{Re}(z)$

$y$  disebut bagian imajiner dari  $z$ , ditulis  $y=\text{Im}(z)$ .



Jika  $z_1 = x_1 + y_1i$  dan  $z_2 = x_2 + y_2i$  adalah bilangan kompleks, maka:

a.  $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

b.  $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$

Pada definisi penjumlahan dan perkalian terlihat jelas seperti operasi pada bilangan real.

Jika pada  $z_1z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)$

$$= x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2i^2$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2i^2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

kemudian  $i^2$  diganti dengan  $-1$ , maka didapat:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$



Jika  $z = (x, y) = x + yi$ , maka bilangan **kompleks sekawan** (*conjugate*) dari  $z$ ; ditulis  $\bar{z}$  dan didefinisikan sebagai  $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$

Sebagai contoh

$z_1 = 3 + 4i$ , kompleks sekawannya adalah  $\bar{z}_1 = 3 - 4i$

$z_2 = -2 - 5i$ , kompleks sekawannya adalah  $\bar{z}_2 = -2 + 5i$



Lambang bilangan kompleks :

$$z = (x, y) = x + yi; \quad x, y \text{ real}; \quad i^2 = -1$$

$$(x, 0) = x; \quad (0, y) = yi; \quad (0, 1) = i.$$

Operasi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

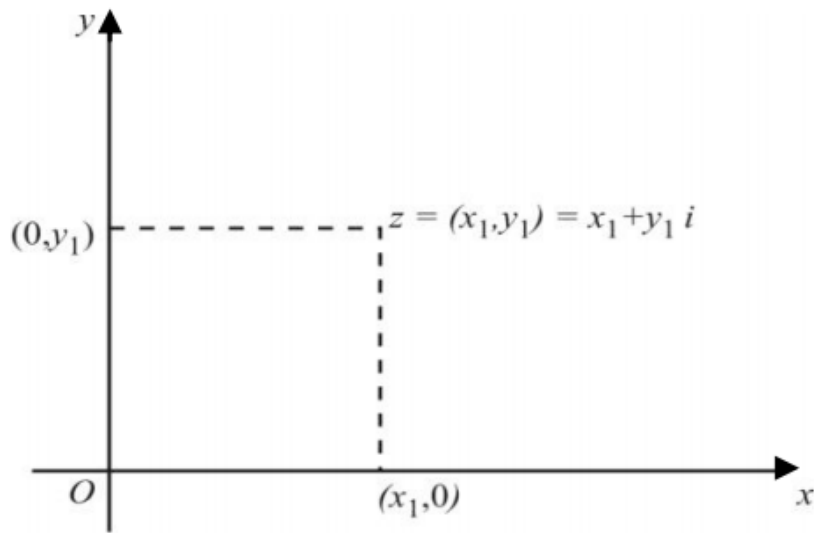
$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 - y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

# Arti Geometri dari Bilangan Kompleks

**Bilangan Kompleks** dapat terwakili oleh semua titik pada bidang Cartesian. **Bidang Cartesian** dinamakan bidang kompleks atau bidang  $z$ . Penyajian bilangan kompleks dalam bidang ini disebut **diagram Argand**



$x$  : sumbu real  
 $y$  : sumbu imajiner  
 $O$  :  $(0,0)$

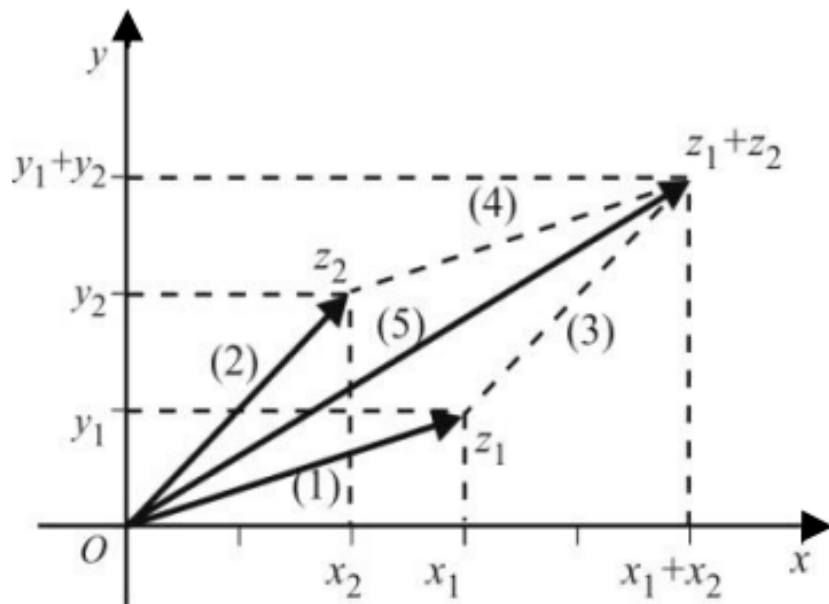
Dalam pengertian yang terbatas bilangan kompleks

$$z = (x, y) = x + yi$$

dapat dipandang sebagai vektor  $(x, y)$  dan operasi penjumlahan dan pengurangan dua bilangan kompleks secara geometri serupa dengan operasi tersebut pada **vektor**.

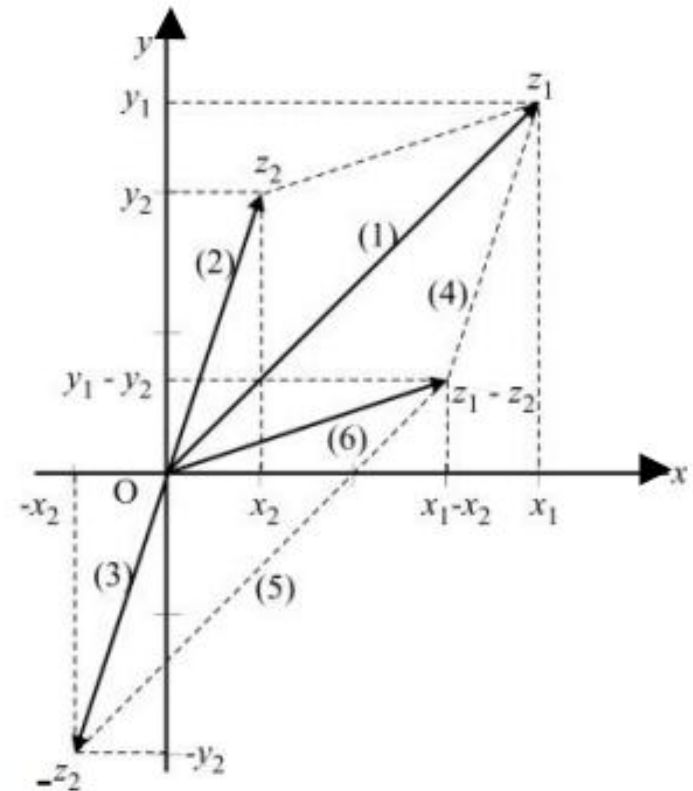


Gambar berikut memperlihatkan arti geometri dari bilangan kompleks  $z_1, z_2, z_1 + z_2, z_1 - z_2$



(a) Penjumlahan

urutan langkah (1), (2), (3), (4), (5)



(b) Pengurangan

urutan langkah (1), (2), (3), (4), (5), (6)

# Contoh

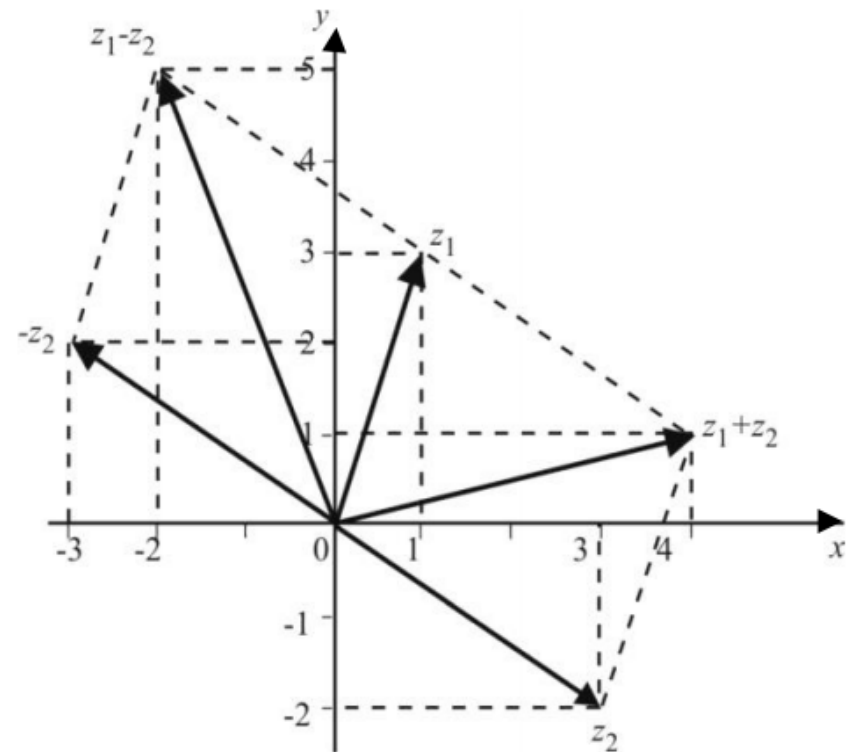
Diketahui bilangan kompleks  $z_1 = 1 + 3i$  dan  $z_2 = 3 - 2i$ .

Gambarkan bilangan kompleks  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$ , dan  $z_1 - z_2$  dengan cara seperti penjumlahan dan pengurangan vektor.

Apabila dihitung,  
tersebut harus cocok dengan

$$z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (3 - 2i) = 4 + i$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 3i) - (3 - 2i) = -2 + 5i$$

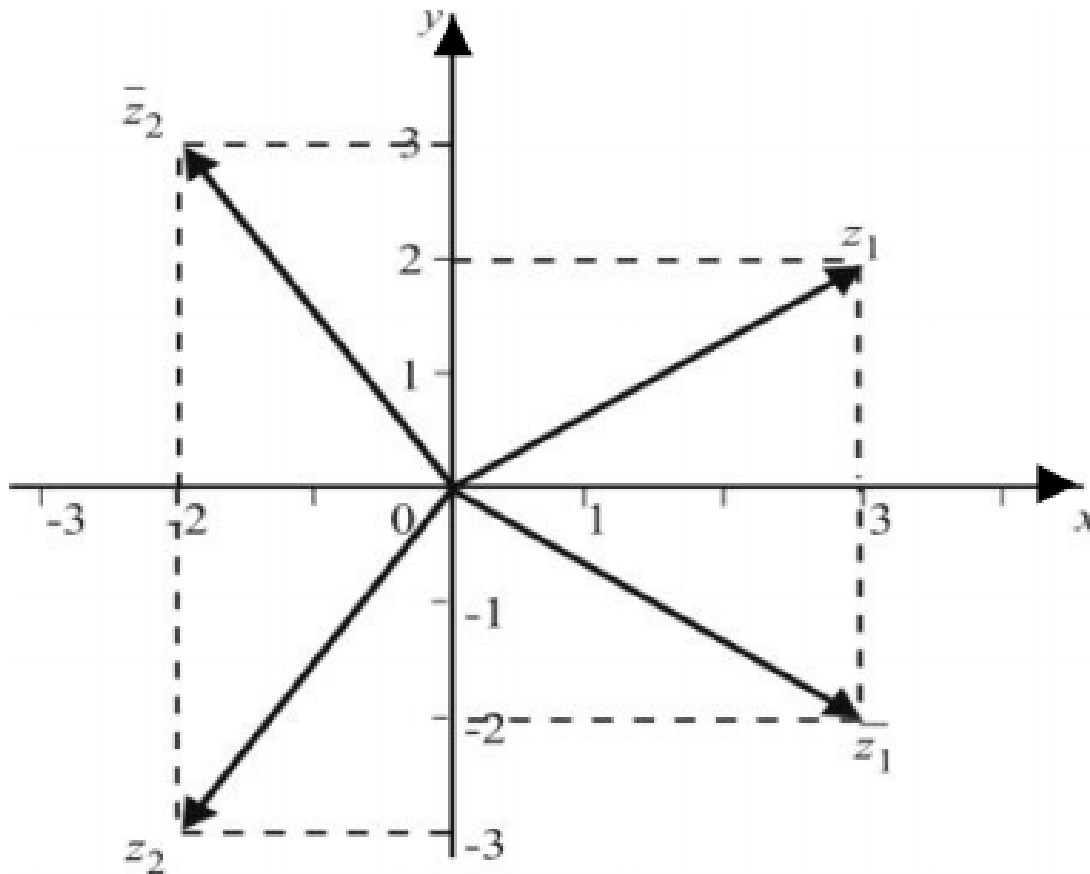




# Contoh



kompleks sekawan dari  $z_1 = 3 + 2i$  dan  $z_2 = -2 - 3i$



$$\bar{z}_1 = 3 - 2i$$

$$\bar{z}_2 = -2 + 3i$$

## MODULUS (NILAI MUTLAK) DARI BILANGAN KOMPLEKS



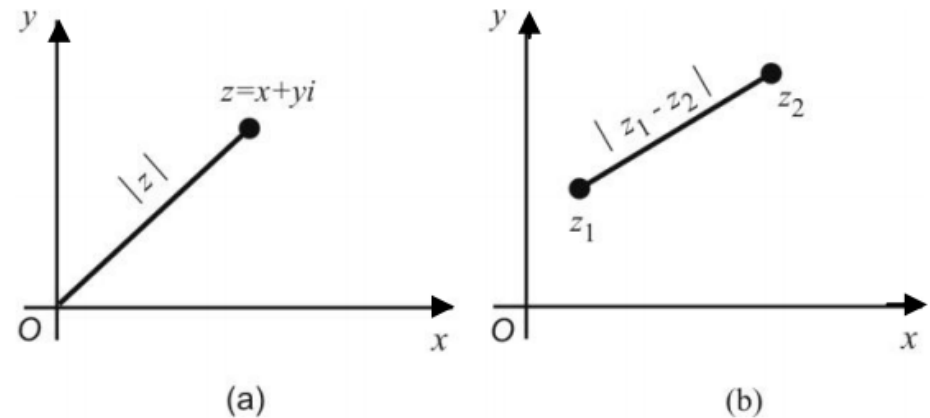
Jika  $z = x + yi$  bilangan kompleks, maka **modulus** dari  $z$ , ditulis  $|z|$  dan didefinisikan sebagai  $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Definisi ini menunjukkan bahwa  $|z|$  merupakan bilangan real positif atau nol. Arti geometri  $|z|$ , menyatakan panjang vektor  $(x, y)$ , yaitu jarak dari titik asal  $O = (0, 0)$  terhadap titik  $z = (x, y)$

Akibat dari definisi tersebut, jika  $z_1 = (x_1, y_1)$  dan  $z_2 = (x_2, y_2)$ , maka

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

menyatakan jarak antara titik  $z_1$  dan titik  $z_2$





Selanjutnya apabila  $z_1 = x_1 + y_1i$  dan  $r$  bilangan real positif, maka  $|z - z_1| = r$  menyatakan lingkaran berpusat di titik  $z_1 = (x_1, y_1)$  berjari-jari  $r$ , sedangkan  $|z - z_1| < r$  menyatakan daerah di dalam lingkaran yang berpusat di  $z_1 = (x_1, y_1)$  berjari-jari  $r$ .

Penting sekali diingat bahwa **tidak ada urutan antara dua bilangan kompleks**  $z_1$  dan  $z_2$ . Tetapi untuk modulusnya dikenal urutan karena modulus suatu bilangan kompleks merupakan bilangan real.

sifat-sifat dari modulus atau nilai mutlak dari bilangan kompleks.



a. Jika  $z$  bilangan kompleks, maka

$$1. |z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$$

$$2. |z| = |\bar{z}|$$

$$3. |z|^2 = z \bar{z}$$

$$4. |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| \geq \operatorname{Re}(z)$$

$$5. |z| \geq |\operatorname{Im}(z)| \geq \operatorname{Im}(z)$$

b. Jika  $z_1, z_2$  bilangan kompleks, maka

$$1. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$2. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$3. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$4. |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

$$5. |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

# Latihan



1 Jika  $z_1 = 1+i$  dan  $z_2 = -4 + 4i$ , maka  $3z_1 + 4z_2 = \dots$ .

2 Jika  $z_1 = 3+2i$  dan  $z_2 = 2-i$ , maka  $z_1z_2 = \dots$ .

3 Jika  $z_1 = 2-3i$  dan  $z_2 = 4-i$ , maka  $\frac{z_1}{z_2} = \dots$ .

Kumpulkan melalui email :  
[bambangsetiadi13@gmail.com](mailto:bambangsetiadi13@gmail.com)

Paling lambat tanggal : 5 Juni 2021  
Jam 08.00