

# PROSIDING



## Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya (SNMP) 2020

**“Peran Matematika dan Pendidikan Matematika  
dalam Menyongsong Era Disrupsi”**



**27 Oktober 2020**

Diterbitkan oleh:  
FMIPA Universitas Negeri Malang  
ISBN: 978-623-96664-0-8

Website:  
<http://matematika.fmipa.um.ac.id/seminar/2020>

Email:  
[seminar.matematika.fmipa@um.ac.id](mailto:seminar.matematika.fmipa@um.ac.id)

# PROSIDING

---

## SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PEMBELAJARANNYA (SNMP) 2020

**Tema:**

Peran Matematika dan Pendidikan Matematika dalam  
Menyongsong Era Disrupsi

Malang, 27 Oktober 2020

**Penerbit**

FMIPA Universitas Negeri Malang

# PROSIDING

---

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PEMBELAJARANNYA 2020

***“Peran Matematika dan Pendidikan Matematika dalam  
Menyongsong Era Disrupsi”***

Malang, 27 Oktober 2020

**Tim Editor:**

Mochammad Hafiizh, S.Pd., M.Si., Ph.D.  
Vita Kusumasari, S.Si., M.Pd., Ph.D.  
Dr. Desi Rahmadani, S.Si., M.Si.  
Latifah Mustofa Lestyanto, S.Si., M.Pd.  
Mohammad Agung, S.Pd., M.Sc.  
Kridha Pusawidjayanti, S.Si., M.Si.  
Denis Eka Cahyani, S.Kom., M.Kom.  
Asmianto, S.Si., M.Si.  
Azizah, S.Si., M.Si.

**ISBN : 978-623-96664-0-8**

*Perpustakaan Nasional: Katalog dalam Terbitan (KDT)*

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ke dalam bentuk apapun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk fotokopi atau merekam dengan teknik apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

ISBN 978-623-96664-0-8

**Penerbit:** FMIPA Universitas Negeri Malang  
Jl. Semarang 5 Malang  
Gedung O1 UM



# PROSIDING

---

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PEMBELAJARANNYA 2020

## STEERING COMMITTEE

Mochammad Hafiizh, S.Pd., M.Si., Ph.D  
Azizah, S.Pd., M.Si  
Kridha Pusawidjayanti, S.Si., M.Si  
Dr. Susiswo, M.Si  
Dr. Erry Hidayanto, M.Si  
Dr. Abd. Qohar, M.T  
Mohammad Agung, S.Pd, M.Sc  
Latifah Mustofa Lestyanto, S.Si, M.Pd  
Vita Kusumasari, S.Si., M.Pd., Ph.D  
Dr. Desi Rahmadani, S.Si., M.Si

## REVIEWER

Prof. Purwanto, Ph.D.  
Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si  
Dahliatul Hasanah, S.Si, M.Mat.Sc.  
Darmawan Satyananda, S.T, M.T  
Dr. Abd. Qohar, M.T  
Dr. Desi Rahmadani, S.Si., M.Si.  
Dr. Erry Hidayanto, M.Si  
Dr. Hery Susanto, M.Si  
Dr. I Nengah Parta, S.Pd, M.Si  
Dr. Ir. Hendro Permadi, M.Si  
Dr. Makbul Muksar, S.Pd, M.Si  
Dr.rer.nat. I Made Sulandra, M.Si  
Dr. Rustanto Rahardi, M.Si

Dr. Subanji, M.Si  
Dr. Sukoriyanto, M.Si  
Dr. Swasono Rahardjo, S.Pd, M.Si  
Dra. Santi Irawati, M.Si, Ph.D.  
Dra. Sapti Wahyuningsih, M.Si  
Drs. Tjang Daniel C, M.Si, Ph.D.  
Indriati Nurul Hidayah, S.Pd, M.Si  
Lucky Tri Oktoviana, S.Si, M.Kom  
Mochammad Hafiizh, S.Pd, M.Si, Ph.D  
Mohamad Yasin, S.Kom, M.Kom  
Nur Atikah, S.Si, M.Si  
Trianingsih Eni Lestari, S.Si, M.Si  
Vita Kusumasari, S.Si, M.Pd, Ph.D

**Penerbit:** FMIPA Universitas Negeri Malang  
Jl. Semarang 5 Malang  
Gedung O1 UM

---

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga FMIPA Universitas Negeri Malang dapat menyelesaikan Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya 2020 yang mengusung tema “Peran Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Menyongsong Era Disrupsi”. Seminar ini telah dilaksanakan di FMIPA Universitas Negeri Malang (UM) pada Selasa, 27 Oktober 2020 secara virtual. Peserta seminar terdiri dari mahasiswa, dosen, dan guru dari berbagai daerah di Indonesia.

Artikel-artikel yang dimuat dalam prosiding ini telah melalui proses seleksi, reviu oleh para ahli bidang matematika dan pendidikan matematika, revisi oleh penulis dan reviu final oleh reviewer untuk menjamin kualitas artikel yang dimuat dalam prosiding ini. Artikel yang dimuat meliputi Topik Pendidikan Matematika seperti: (1) Proses Berpikir, (2) Penerapan Model Pembelajaran, (3) Penelitian Tindakan Kelas (PTK), dan (4) Pengembangan Media. Sedangkan topik Matematika dan Penerapannya mencakup (1) Aljabar, (2) Statistika, (3) Analisis, (4) Terapan, (5) Geometri dan Graph, dan (6) Komputasi. Oleh karena itu, prosiding ini dapat dijadikan sebagai rujukan pengetahuan yang berkualitas.

Kami mengucapkan terimakasih kepada semua panitia dan reviewer kegiatan Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya yang tidak dapat kami sebutkan semua. Ucapan terimakasih juga kami sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Marsigit, M.A (Universitas Negeri Yogyakarta), selaku pembicara utama.
2. Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si (Universitas Negeri Malang), selaku pembicara utama.
3. Dr. Susiswo, M.Si, ketua Jurusan Matematika FMIPA UM.
4. Pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per-satu.

Untuk kesempurnaan prosiding pada seminar-seminar selanjutnya, kritik atau saran yang membangun sangat kami harapkan. Akhirnya, semoga prosiding ini dapat memberikan manfaat bagi peserta seminar dan pembaca secara umum.

Dekan FMIPA  
Universitas Negeri Malang

Prof. Dr. Hadi Suwono, M.Si

DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>ii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>iii</b>
<b>ARTIKEL PEMBICARA UTAMA.....</b>	<b>1</b>
<b>PERAN MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DALAM MENYONGSONG ERA DISRUPSI.....</b>	<b>2</b>
<b>ANTI FUZZY GRAPH.....</b>	<b>14</b>
<b>ARTIKEL PEMBICARA UNDANGAN.....</b>	<b>26</b>
<b>MEMBACA PIKIRAN INTUITIF DAN ANALITIS DARI SOLUSI MATEMATIKA .....</b>	<b>27</b>
<b>ARTIKEL PEMBICARA PARALEL .....</b>	<b>34</b>
<b>ISOMORFISMA GRUP ANTARA HASILKALI LANGSUNG EKSTERNAL DAN HASIL KALI PUSAT INTERNAL.....</b>	<b>35</b>
<b>PENGEMBANGAN KRITERIA MODUL INJEKTIF MENJADI MODUL <math>\Sigma</math> –INJEKTIF.....</b>	<b>41</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL MAIN KI DAN IMPLEMENTASINYA DALAM MATERI PENGUMPULAN DAN PENGOLAHAN DATA DI SEKOLAH DASAR.....</b>	<b>50</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA DALAM PERMAINAN TRADISIONAL SAMBUNG KAKI DAN IMPLEMENTASINYA DALAM PEMBELAJARAN TOPIK TEOREMA PHYTAGORAS DAN KESEBANGUNAN .....</b>	<b>59</b>
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN PENTENG KHAS MADURA DAN IMPLIKASINYA DALAM PEMBELAJARAN TOPIK KELIPATAN BILANGAN .....</b>	<b>69</b>
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL BABANGA DARI KALIMANTAN SELATAN DAN PENGGUNAANNYA DALAM PEMBELAJARAN .....</b>	<b>79</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN BASASAKOLAHAN DAN IMPLEMENTASINYA UNTUK PEMBELAJARAN MATERI PELUANG .....</b>	<b>88</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TAK-TIK BALI DAN IMPLEMENTASINYA DALAM PEMBELAJARAN PEMODELAN GERAK PARABOLA .....</b>	<b>97</b>
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PERMAINAN TRADISIONAL “MAIN CEPU” DARI LAMPUNG DAN IMPLEMENTASI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MATERI FILLING SLOT DAN COMBINASI .....</b>	<b>107</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL POKIBO DAN PENERAPANNYA DALAM RANCANGAN PEMBELAJARAN PELUANG.....</b>	<b>115</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL BALUBUK DARI KALIMANTAN SELATAN DAN IMPLEMENTASINYA TERHADAP PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN MATERI OPERASI BILANGAN BULAT.....</b>	<b>124</b>

<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN CONGKAK DARI BENGKULU DAN IMPLEMENTASINYA PADA PENGEMBANGAN SOAL HOTS.....</b>	<b>135</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TODO-TODO MINYA DAN PENERAPANNYA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA UNTUK MATERI PELUANG DI SMP.....</b>	<b>144</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN KEPALA BABI DAN IMPLEMENTASINYA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA PADA KONSEP PERKALIAN.....</b>	<b>153</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL BAKARAT DAN IMPLEMENTASINYA PADA PEMBELAJARAN TOPIK PERBANDINGAN .....</b>	<b>160</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN BUTA LELE DAN INTEGRASINYA DALAM RANCANGAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA TOPIK PERKALIAN KELAS 2 SEKOLAH DASAR .....</b>	<b>171</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL “MA’ BEKEL” DARI KALIMANTAN TIMUR DAN PENERAPANNYA DALAM PEMBELAJARAN PADA KONSEP PERKALIAN DAN PEMBAGIAN KELAS VI SD.....</b>	<b>181</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL TENGGOH-TENGGOHAN DARI SUMATERA SELATAN DAN PENERAPANNYA PADA MATERI PELUANG DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA.....</b>	<b>190</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN BABULANAN DAN IMPLEMENTASINYA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MATERI GEOMETRI DIMENSI DUA.....</b>	<b>198</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL BABURUNGAN DAN IMPLEMENTASI PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA TOPIK PELUANG.....</b>	<b>208</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL MADEPA-DEPAAN DAN IMPLEMENTASINYA TERHADAP RENCANA PEMBELAJARAN MATERI PENGUKURAN PANJANG .....</b>	<b>218</b>
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA DALAM PERMAINAN TRADISIONAL CIK-KECIKAN DARI MADURA DAN IMPLEMENTASINYA PADA PEMBELAJARAN MATERI PELUANG.....</b>	<b>225</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN KAPAL-KAPALAN DARI BALI DAN IMPLEMENTASINYA UNTUK PEMBELAJARAN MATERI PELUANG .....</b>	<b>234</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA DALAM PERMAINAN CEPLI DAN IMPLEMENTASINYA DALAM PEMBELAJARAN PELUANG.....</b>	<b>241</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PERMAINAN KUCING-KUCING DAN IMPLEMENTASINYA DALAM MENGENALKAN OPERASI MODULO.....</b>	<b>249</b>
<b>EKSPLORASI ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN MACAN-MACANAN DARI BALI DAN IMPLEMENTASINYA PADA SOAL HOTS MATEMATIKA TINGKAT SMP DAN SMA .....</b>	<b>257</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PERMAINAN TRADISIONAL MAKUCUNG-KUCUNGAN BALI DAN IMPLEMENTASINYA PADA PEMBELAJARAN MATERI MODULO .....</b>	<b>268</b>
<b>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL MAGEMBLUNG DARI BALI DAN IMPLEMENTASINYA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA TOPIK OPERASI HITUNG .....</b>	<b>277</b>

<i>DIMENSI K-METRIK PADA GRAF COCKTAIL PARTY, GRAF BANANA TREE, DAN GRAF LINTASAN KORONA LINTASAN .....</i>	<i>287</i>
<i>PENERAPAN CAPACITATED VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PENDISTRIBUSIAN MANGGA PODANG DI KABUPATEN KEDIRI .....</i>	<i>295</i>
<i>DIMENSI K-METRIK PADA GRAF MUSICAL, GRAF TURAN, DAN GRAF CYCLE CORONA GRAF COMPLETE BIPARTITE .....</i>	<i>303</i>
<i>PELABELAN TOTAL SISI TRIMAGIC SUPER PADA GRAF BUTTERFLY .....</i>	<i>315</i>
<i>PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TANGGA SEGI EMPAT VARIASI .....</i>	<i>320</i>
<i>DIMENSI K-METRIK PADA GRAF FIRECRACKER DAN GRAF BROOM .....</i>	<i>325</i>
<i>ANALISA PERBANDINGAN INFERENSI FUZZY TSUKAMOTO DAN MAMDANI DALAM MEMPREDIKSI JUMLAH PENDAFTAR MAHASISWA BARU PRODI TADRIS MATEMATIKA IAIN KEDIRI .....</i>	<i>331</i>
<i>KEKUATAN SISI REFLEKSIF PADA GRAF TANGGA.....</i>	<i>339</i>
<i>RULE BASED PADA FUZZY INFERENCE SYSTEM METODE TSUKAMOTO DALAM SISTEM PENDUKUNG KEPUTUSAN .....</i>	<i>343</i>
<i>IDENTIFIKASI PENALARAN KREATIF DAN IMITATIF SISWA DITINJAU DARI PERBEDAAN GENDER .....</i>	<i>362</i>
<i>IMPLEMENTASI TEORI VYGOTSKY DALAM PROJECT BASED LEARNING PADA MATA KULIAH KAJIAN &amp; PENGEMBANGAN BAHAN AJAR.....</i>	<i>370</i>
<i>ANALISIS PENGETAHUAN PROSEDURAL MAHASISWA PADA POKOK BAHASAN UKURAN LETAK DATA BERBANTUAN MINITAB DAN SPSS .....</i>	<i>379</i>
<i>PENERAPAN VIDEO PEMBELAJARAN BERBANTUAN MINITAB PADA PEMBELAJARAN DARING UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN KONSEP ANALISIS REGRESI NON LINIER MAHASISWA .....</i>	<i>389</i>
<i>PERSEPSI MAHASISWA MATEMATIKA TERHADAP PERKULIAHAN EKONOMETRIKA BERBASIS KELAS VIRTUAL BERBANTUAN MINITAB .....</i>	<i>399</i>
<i>PROSES BERPIKIR KONSEPTUAL SISWA SMP DALAM MENYELESAIKAN PERMASALAHAN ALJABAR.....</i>	<i>408</i>
<i>PENGARUH DUKUNGAN ORANG TUA DAN KEPERCAYAAN DIRI SISWA TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA MELALUI MEDIASI MOTIVASI BELAJAR SISWA .....</i>	<i>414</i>
<i>PEMAHAMAN KONSEP REGRESI LINEAR BERGANDA BERBANTUAN MINITAB PADA PERKULIAHAN DARING EKONOMETRIKA MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA .....</i>	<i>422</i>
<i>TRANSLASI REPRESENTASI VERBAL KE GRAFIK DALAM MENYELESAIKAN SOAL BANGUN DATAR DITINJAU DARI GAYA KOGNITIF PESERTA DIDIK.....</i>	<i>432</i>
<i>PENERAPAN MEDIA SUDUT TRIGONOMETRI (SUTRI) UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN DAN KEAKTIFAN SISWA PADA MATERI TRIGONOMETRI.....</i>	<i>441</i>
<i>ANALISIS PROSES BERPIKIR ALJABAR MAHASISWA CALON GURU MATEMATIKA DENGAN KEMAMPUAN MATEMATIKA RENDAH MENURUT TAKSONOMI SOLO.....</i>	<i>448</i>

<i>ANALISIS KESALAHAN REPRESENTASI SIMBOLIK CALON GURU MATEMATIKA DALAM MENYELESAIKAN SOAL KALKULUS .....</i>	<i>455</i>
<i>KONEKSI MATEMATIS SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL NON RUTIN SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL (SPLTV).....</i>	<i>465</i>
<i>ANALISIS KEMAMPUAN BERNALAR MATEMATIS SISWA PADA MATERI TRIGONOMETRI</i>	<i>475</i>
<i>PENERAPAN PEMBELAJARAN BERBASIS INKUIRI BERBANTUAN GAMES SOAL UNTUK MENINGKATKAN MINAT BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS X .....</i>	<i>485</i>
<i>PERSEPSI MAHASISWA JURUSAN MATEMATIKA TERHADAP PERKULIAHAN DARING DI MATA KULIAH EKONOMETRIKA PADA POKOK BAHASAN AUTOKORELASI.....</i>	<i>493</i>
<i>PEMODELAN PENDAPATAN ASLI DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA MENGGUNAKAN REGRESI DATA PANEL .....</i>	<i>500</i>
<i>MODEL GEOSPASIAL : UNIVERSAL KRIGING DENGAN SEMIVARIOGRAM COPULA .....</i>	<i>509</i>
<i>PEMODELAN DISCRETE TIME MARKOV CHAIN SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED (DTMC SIR) PADA PENYEBARAN PENYAKIT EBOLA DI SIERRA LEONE .....</i>	<i>516</i>
<i>PEMODELAN TINGKAT KEMISKINAN DI INDONESIA.....</i>	<i>525</i>
<i>MODEL PEMBELAJARAN PBL DENGAN BERBANTUAN SPSS UNTUK MEMUDAHKAN PEMAHAMAN MAHASISWA PADA MATERI SKEWNESS DAN KURTOSIS .....</i>	<i>532</i>
<i>PENERAPAN REGRESI HURDLE NEGATIVE BINOMIAL (HNB) UNTUK MEMODELKAN DATA JUMLAH KEMATIAN IBU HAMIL DI PROVINSI JAWA TIMUR .....</i>	<i>541</i>
<i>PENGGUNAAN K-MEANS CLUSTERING UNTUK MENGATASI IMBALANCE DATA DENGAN ELM (EXTREME LEARNING MACHINE) SEBAGAI CLASSIFIER.....</i>	<i>548</i>
<i>PEMODELAN AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE (ARIMA) PADA JUMLAH KUNJUNGAN WISATAWAN DOMESTIK DI KOTA MALANG TAHUN 2014 - 2018.....</i>	<i>555</i>
<i>PREDIKSI VOLUME PRODUKSI AIR BERSIH PERUSAHAAN DAERAH AIR MINUM (PDAM) KABUPATEN MALANG MENGGUNAKAN METODE EXPONENTIAL SMOOTHING .....</i>	<i>566</i>
<i>ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI NONPARAMETRIK SPLINE TRUNCATED DENGAN PENALIZED LEAST SQUARE.....</i>	<i>575</i>
<i>KAJIAN ETNOMATEMATIKA PADA PERMAINAN TRADISIONAL MACONTOK DAN PENGGUNAANNYA DALAM OPERASI HITUNG PADA ANAK.....</i>	<i>582</i>



## **ARTIKEL PEMBICARA UTAMA**

## DIMENSI $k$ -METRIK PADA GRAF COCKTAIL PARTY, GRAF BANANA TREE, DAN GRAF LINTASAN KORONA LINTASAN

Afif Miftahudi<sup>1,a)</sup>, Tri Atmojo Kusmayadi<sup>2,b)</sup>

<sup>1,2)</sup>Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret,  
Jl. Ir. Sutami no. 36A, Surakarta, Indonesia

<sup>a)</sup>miftahudiafif@gmail.com

<sup>b)</sup>tri.atmojo.kusmayadi@staff.uns.ac.id

### Abstrak

Diberikan graf terhubung dan sederhana  $G$  dengan himpunan *vertex*  $V(G)$  dan himpunan *edge*  $E(G)$ . Himpunan  $S \subseteq V(G)$  disebut sebagai pembangkit  $k$ -metrik pada  $G$  jika dan hanya jika untuk setiap dua pasang *vertex* yang berbeda  $u, v \in V(G)$ , terdapat paling sedikit  $k$  *vertex*  $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$  sedemikian sehingga  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  dengan  $d(u, v)$  adalah panjang *path* terpendek dari *vertex*  $u$  ke *vertex*  $v$ . Pembangkit  $k$ -metrik dengan jumlah anggota minimal disebut basis  $k$ -metrik dan banyaknya anggota dari basis  $k$ -metrik disebut dimensi  $k$ -metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan  $dim_k(G)$ . Dalam penelitian ini, diperoleh dimensi  $k$ -metrik pada graf *cocktail party* ( $CP_n$ ) untuk  $n \geq 3$ , graf *banana tree* ( $B_{n,m_i}$ ) dengan  $n \geq 1$  dan  $m_i \geq 4$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ , dan graf lintasan korona lintasan ( $P_n \odot P_m$ ) dengan  $n \geq 3$  dan  $2 \leq m \leq 3$ .

**Kata kunci:** dimensi  $k$ -metrik, graf *cocktail party*, graf *banana tree*, graf lintasan korona lintasan

### PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Sejarah perkembangan teori graf diawali oleh Leonhard Euler seorang matematikawan dari Swiss yang memecahkan teka-teki pada jembatan Königsberg. Teori graf telah berkembang hingga sekarang dan dapat diterapkan pada banyak hal, seperti jaringan komunikasi, transportasi, riset operasi, dan sebagainya.

Seiring perkembangannya, muncul konsep-konsep baru dalam teori graf salah satunya yaitu dimensi metrik. Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975, yang selanjutnya dilanjutkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Dimensi metrik merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda pada  $G$  yang dinotasikan dengan  $dim(G)$ . Misal  $V(G)$  adalah himpunan *vertex* dan  $E(G)$  adalah himpunan *edge* pada graf terhubung  $G$ , didefinisikan suatu himpunan  $S \subset V(G)$  sebagai himpunan pembeda dari *vertex-vertex* pada graf  $G$  sedemikian sehingga setiap dua *vertex*  $v_1$  dan  $v_2$  di  $G$  dibedakan oleh suatu *vertex* di  $S$  berlaku  $d(v_1, S) \neq d(v_2, S)$ .

Dimensi metrik mengalami perkembangan konsep yang baru yaitu dimensi  $k$ -metrik yang dipaparkan oleh Estrada-Moreno *et al.* pada tahun 2015. Misal  $G$  merupakan graf terhubung dan sederhana, himpunan  $S \subseteq V(G)$  disebut sebagai pembangkit  $k$ -metrik pada  $G$  jika dan hanya jika setiap dua *vertex* berbeda di  $G$  dibedakan oleh paling sedikit  $k$  elemen di  $S$ , dengan kata lain untuk setiap dua *vertex* yang berbeda  $u, v \in V(G)$ , terdapat paling sedikit  $k$  *vertex*  $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$  sedemikian sehingga  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  dengan  $d(u, v)$  adalah panjang *path* terpendek dari *vertex*  $u$  ke *vertex*  $v$ . Pembangkit  $k$ -metrik dengan jumlah anggota minimal disebut basis  $k$ -metrik dan banyaknya anggota dari basis  $k$ -metrik disebut dimensi  $k$ -metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan  $dim_k(G)$ .

Tahun 2015, Estrada-Moreno *et al.* telah menemukan dimensi  $k$ -metrik pada graf lintasan

(path), graf lingkaran (cycle), graf pohon (tree), dan graf hasil operasi join dan vertex pada masing-masing graf merupakan twin vertices. Tahun 2016, Estrada-Moreno et al. kembali menemukan dimensi k-metrik pada hasil operasi join dua graf. Tahun 2018, Rahmadi telah menemukan dimensi k-metrik pada graf double fan, graf double cones, graf double fan snake, graf double fan terpusat, graf parasut diperumum, dan graf parasut diperumum dengan path atas. Tahun 2020, Hidayah telah menemukan dimensi k-metrik pada graf generalized fan dan pada amalgamasi edge antara graf cycle dengan graf lengkap ( $C_m * K_n$ ). Pada tahun yang sama Saidah juga menemukan dimensi k-metrik pada graf  $N_k + P_n$  dan graf Starbarbell.

**METODE**

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku, jurnal maupun tulisan-tulisan yang dimuat di situs web. Dari metode ini, dapat ditentukan dimensi k-metrik pada graf cocktail party ( $CP_n$ ) untuk  $n \geq 3$ , graf banana tree ( $B_{n,m_i}$ ) dengan  $n \geq 1$  dan  $m_i \geq 4$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ , dan graf lintasan korona lintasan ( $P_n \odot P_m$ ) dengan  $n \geq 3$  dan  $2 \leq m \leq 3$ .

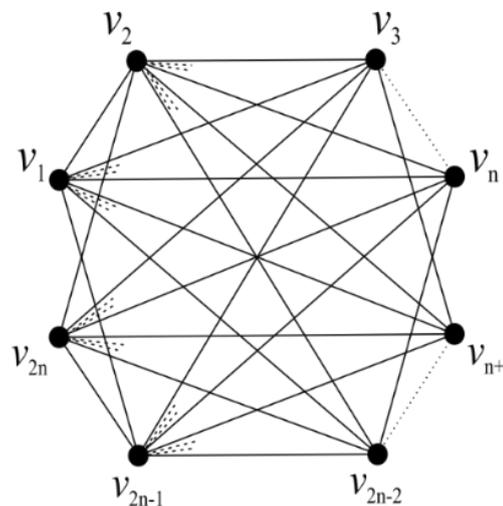
**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Sebelum dipaparkan hasil dan pembahasan, berikut diberikan Lema 1 yang diambil dari Estrada-Moreno et al. (2015).

**Lema 1** (Estrada-Moreno et al. (2015)). *Diberikan graf G dengan orde  $n \geq 2$ . Graf G adalah graf berdimensi 2-metrik jika dan hanya jika G mempunyai twin vertices.*

**Dimensi k-Metrik pada Graf Cocktail Party**

Biggs et al. (1993) mendefinisikan graf *cocktail party*  $CP_n$  adalah graf yang terdiri dari dua baris vertex yang perpasangan dimana semua vertex kecuali yang berpasangan dihubungkan dengan suatu edge. Graf *cocktail party* ( $CP_n$ ) dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf *cocktail party* ( $CP_n$ )

Terlihat dari Gambar 1, *vertex-vertex* yang saling berpasangan yaitu  $v_1$  dengan  $v_{2n}$ ,  $v_2$  dengan  $v_{2n-1}$ ,  $v_3$  dengan  $v_{2n-2}$ , ...,  $v_n$  dengan  $v_{n+1}$ . Kemudian *vertex*  $v_1$  terhubung kesemua *vertex* yang ada pada graf  $CP_n$  kecuali pasangannya yaitu *vertex*  $v_{2n}$ , begitu pula dengan *vertex*  $v_2, v_3, \dots, v_n$  terhubung ke semua *vertex* yang ada pada graf  $CP_n$  kecuali dengan pasangannya masing-masing. Berikut diberikan Tabel 1 jarak setiap dua *vertex* yang berbeda pada graf *cocktail party*.

Tabel 1. Jarak setiap dua *vertex* berbeda pada graf *cocktail party*

Jarak	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$\dots$	$v_n$	$v_{n+1}$	$\dots$	$v_{2n-2}$	$v_{2n-1}$	$v_{2n}$
$v_1$	0	1	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1	1	2
$v_2$	1	0	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1	2	1
$v_3$	1	1	0	$\dots$	1	1	$\dots$	2	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_n$	1	1	1	$\dots$	0	2	$\dots$	1	1	1
$v_{n+1}$	1	1	1	$\dots$	2	0	$\dots$	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{2n-2}$	1	1	2	$\dots$	1	1	$\dots$	0	1	1
$v_{2n-1}$	1	2	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1	0	1
$v_{2n}$	2	1	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1	1	0

**Lema 2.** Diberikan  $CP_n$  adalah graf *cocktail party* dengan  $n \geq 3$  maka  $CP_n$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $CP_n$  adalah graf *cocktail party* ber-order  $2n$ . Berdasarkan Gambar 1 diperoleh  $N_{CP_n}[v_1] = N_{CP_n}[v_{2n}]$ ,  $N_{CP_n}[v_2] = N_{CP_n}[v_{2n-1}]$ ,  $N_{CP_n}[v_3] = N_{CP_n}[v_{2n-2}]$ ,  $\dots$ ,  $N_{CP_n}[v_n] = N_{CP_n}[v_{n+1}]$  sehingga  $v_1, v_{2n}, v_2, v_{2n-1}, v_3, v_{2n-2}, \dots, v_n, v_{n+1}$  merupakan *twin vertices*. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $CP_n$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Teorema 1.** Diberikan  $CP_n$  adalah graf *cocktail party* dengan  $n \geq 3$ , maka berlaku  $dim_2(CP_n) = 2n$ .

*Bukti.* Diketahui  $CP_n$  adalah graf berdimensi 2-metrik untuk  $n \geq 3$ , artinya terdapat basis 2-metrik pada  $CP_n$ .

(1) Akan ditunjukkan bahwa  $dim_2(CP_n) \leq 2n$ .

Misal himpunan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$  dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Akan ditunjukkan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi dari setiap *vertex* di  $CP_n$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(v_1|S) &= (0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 2); \\
 r(v_2|S) &= (1, 0, \dots, 1, 1, \dots, 2, 1); \\
 &\vdots \\
 r(v_n|S) &= (1, 1, \dots, 0, 2, \dots, 1, 1); \\
 r(v_{n+1}|S) &= (1, 1, \dots, 2, 0, \dots, 1, 1); \\
 &\vdots \\
 r(v_{2n-1}|S) &= (1, 2, \dots, 1, 1, \dots, 0, 1); \\
 r(v_{2n}|S) &= (2, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(CP_n)$  berlaku  $r(u|W) \neq r(v|W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik.

(2) Akan ditunjukkan bahwa  $dim_2(CP_n) \geq 2n$ .

Misal himpunan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$  dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| = 2n$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < 2n$ , maka terdapat himpunan  $S$  yaitu  $S \subseteq \{v_{p_i} | 1 \leq i \leq 2n-1\}$  dengan  $p_i \in \{1, \dots, 2n\}$ . Diperhatikan bahwa untuk setiap  $u, v \in V(CP_n)$  terdapat  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  yang harus memenuhi  $r(u|W) \neq r(v|W)$  agar  $S$  menjadi pembangkit 2-metrik. Berdasarkan Tabel 1 diperoleh bahwa terdapat  $r(u|W) = r(v|W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus

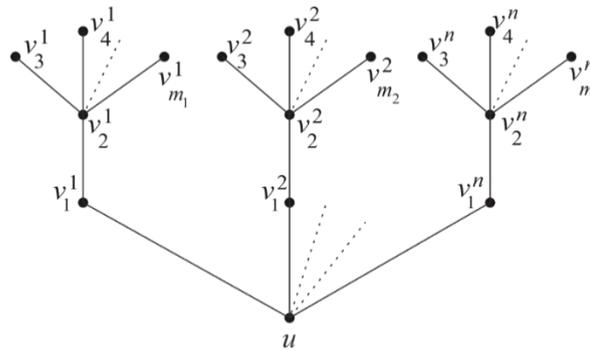
diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $S \geq 2n$ . Selanjutnya, diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik.

Berdasarkan (1) dan (2), terbukti bahwa  $\dim_2(CP_n) = 2n$ . □

### Dimensi $k$ -Metrik pada Graf *Banana Tree*

Menurut Chartrand *et al.* (2016) suatu graf  $G$  dinamakan graf bipartit jika himpunan *vertex* dari  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian  $X, Y \subset V(G)$  sedemikian sehingga  $X \cap Y = \emptyset$  dan setiap *edge* pada  $G$  *incident* dengan masing-masing satu *vertex* pada  $X$  dan  $Y$ . Kemudian Chartrand *et al.* (2016) juga mengatakan bahwa suatu graf bipartit disebut graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  dengan  $m = |X|$ ,  $n = |Y|$ , dan  $X, Y \subset K_{m,n}$  jika setiap *vertex* pada partisi  $X$  *adjacent* dengan setiap *vertex* pada partisi  $Y$ . Chartrand dan Zhang (2009) menuliskan bahwa suatu graf bipartit lengkap dengan  $m = 1$  disebut juga graf bintang  $K_{1,n}$  yang memiliki *order*  $n + 1$  dan *size*  $n$ .

Chen *et al.* (1997) mendefinisikan graf *banana tree*  $B_{n,m_i}$  adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu *vertex* dari setiap salinan graf bintang ke satu *vertex* baru yang disebut simpul akar, dengan  $n$  adalah banyaknya salinan dari graf bintang sedangkan  $m_i$  adalah banyaknya *vertex* pada graf bintang ke- $i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .



Gambar 2. Graf *banana tree* ( $B_{n,m_i}$ )

Berikut diberikan Tabel 2 jarak setiap dua *vertex* yang berbeda pada graf *banana tree*.

Tabel 2. Jarak setiap dua *vertex* yang berbeda pada graf *banana tree*.

Jarak	u	$v_1^1$	$v_2^1$	$v_3^1$	...	$v_{m_1}^1$	$v_1^2$	$v_2^2$	$v_3^2$	...	$v_{m_2}^2$	...	$v_1^n$	$v_2^n$	$v_3^n$	...	$v_{m_n}^n$
u	0	1	2	3	...	3	1	2	3	...	3	...	1	2	3	...	3
$v_1^1$	1	0	1	2	...	2	2	3	4	...	4	...	2	3	4	...	4
$v_2^1$	2	1	0	1	...	1	3	4	5	...	5	...	3	4	5	...	5
$v_3^1$	3	2	1	0	...	2	4	5	6	...	6	...	4	5	6	...	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{m_1}^1$	3	2	1	2	...	0	4	5	6	...	6	...	4	5	6	...	6
$v_1^2$	1	2	3	4	...	4	0	1	2	...	2	...	2	3	4	...	4
$v_2^2$	2	3	4	5	...	5	1	0	1	...	1	...	3	4	5	...	5
$v_3^2$	3	4	5	6	...	6	2	1	0	...	2	...	4	5	6	...	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{m_2}^2$	3	4	5	6	...	6	2	1	2	...	0	...	4	5	6	...	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_1^n$	1	2	3	4	...	4	2	3	4	...	4	...	0	1	2	...	2
$v_2^n$	2	3	4	5	...	5	3	4	5	...	5	...	1	0	1	...	1

$v_3^n$	3	4	5	6	...	6	4	5	6	...	6	...	2	1	0	...	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{m_i}^n$	3	4	5	6	...	6	4	5	6	...	6	...	2	1	2	...	0

**Lema 3.** Diberikan  $B_{n,m_i}$  adalah graf banana tree dengan  $n \geq 1$  dan  $m_i \geq 4$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ , maka  $B_{n,m_i}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $B_{n,m_i}$  adalah graf banana tree ber-order  $nm + 1$ . Berdasarkan Gambar 2 diperoleh  $N_{B_{n,m_i}}[v_x^t] = N_{B_{n,m_i}}[v_y^t]$  dengan  $t = 1, 2, \dots, n$  dan  $x \neq y$  untuk  $x, y \geq 3$ . Sehingga  $v_x^t$  dan  $v_y^t$  merupakan twin vertices. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $B_{n,m_i}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Teorema 2.** Diberikan  $B_{n,m_i}$  adalah graf banana tree dengan  $n \geq 1$  dan  $m_i \geq 4$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ , maka berlaku  $dim_2(B_{n,m_i}) = \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ .

*Bukti.* Diketahui  $B_{n,m_i}$  adalah graf berdimensi 2-metrik dengan  $n \geq 1$  dan  $m_i \geq 4$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ , artinya terdapat basis 2-metrik pada  $B_{n,m_i}$ .

(1) Akan ditunjukkan bahwa  $dim_2(B_{n,m_i}) \leq \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ .

Misal himpunan  $S = \{v_x^t\}$  dengan  $t = 1, 2, \dots, n$  dan  $x \geq 3$ . Akan ditunjukkan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi dari setiap vertex di  $B_{n,m_i}$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(u|S) &= (3, \dots, 3, 3, \dots, 3, \dots, 3, \dots, 3); \\
 r(v_1^1|S) &= (2, \dots, 2, 4, \dots, 4, \dots, 4, \dots, 4); \\
 r(v_2^1|S) &= (1, \dots, 1, 3, \dots, 3, \dots, 3, \dots, 3); \\
 r(v_3^1|S) &= (0, \dots, 2, 6, \dots, 6, \dots, 6, \dots, 6); \\
 &\vdots \\
 r(v_{m_1}^1|S) &= (2, \dots, 0, 6, \dots, 6, \dots, 6, \dots, 6); \\
 r(v_1^2|S) &= (4, \dots, 4, 2, \dots, 2, \dots, 4, \dots, 4); \\
 r(v_2^2|S) &= (5, \dots, 5, 1, \dots, 1, \dots, 5, \dots, 5); \\
 r(v_3^2|S) &= (6, \dots, 6, 0, \dots, 2, \dots, 6, \dots, 6); \\
 &\vdots \\
 r(v_{m_2}^2|S) &= (6, \dots, 6, 2, \dots, 0, \dots, 6, \dots, 6); \\
 &\vdots \\
 r(v_1^n|S) &= (4, \dots, 4, 4, \dots, 4, \dots, 2, \dots, 2); \\
 r(v_2^n|S) &= (5, \dots, 5, 5, \dots, 5, \dots, 1, \dots, 1); \\
 r(v_3^n|S) &= (6, \dots, 6, 6, \dots, 6, \dots, 0, \dots, 2); \\
 &\vdots \\
 r(v_{m_i}^n|S) &= (6, \dots, 6, 6, \dots, 6, \dots, 2, \dots, 0).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(B_{n,m_i})$  berlaku  $r(u|W) \neq r(v|W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik.

(2) Akan ditunjukkan bahwa  $dim_2(B_{n,m_i}) \geq \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ .

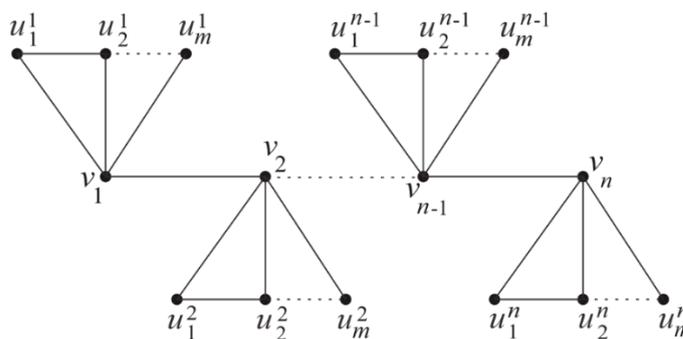
Misal himpunan  $S = \{v_x^t\}$  dengan  $t = 1, 2, \dots, n$  dan  $x \geq 3$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| = \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ , maka terdapat kemungkinan himpunan  $S = \{v_x^1, v_s^t\}$  dengan  $x = 3, 4, \dots, m-1$ ,  $s = 2, 3, \dots, n$ , dan  $t = 3, 4, \dots, m$ . Diperhatikan bahwa untuk setiap  $u, v \in V(B_{n,m_i})$  terdapat  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  yang harus memenuhi  $r(u|W) \neq r(v|W)$  agar  $S$  menjadi pembangkit

2-metrik. Berdasarkan Tabel 2 diperoleh bahwa terdapat  $r(u|W) = r(v|W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $S \geq 2n$ . Selanjutnya, diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik.

Berdasarkan (1) dan (2), terbukti bahwa  $dim_2(B_{n,m_i}) = \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ . □

**Dimensi  $k$ -Metrik pada Graf Lintasan Korona Lintasan**

Pada tahun 1970 Frucht dan Harary menjelaskan bahwa operasi korona dari suatu graf  $G$  dengan graf  $H$ , dinotasikan  $G \odot H$  adalah graf yang terbentuk dari graf  $G$  dan  $|V(G)|$  kopi graf  $H$  yaitu  $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ , kemudian menghubungkan setiap titik  $v_i \in V(G)$  dengan sebuah sisi ke setiap titik dari  $V(H_i)$  untuk  $i \in [1, k]$ . Graf lintasan korona lintasan ( $P_n \odot P_m$ ) dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf lintasan korona lintasan ( $P_n \odot P_m$ )

Berikut diberikan Tabel 3 jarak setiap dua *vertex* yang berbeda pada graf lintasan korona lintasan.

Tabel 3. Jarak setiap dua *vertex* yang berbeda pada graf lintasan korona lintasan.

Jarak	$v_1$	$v_2$	...	$v_n$	$u_1^1$	...	$u_m^1$	$u_1^2$	...	$u_m^2$	...	$u_1^n$	...	$u_m^n$
$v_1$	0	1	...	$n-1$	1	...	1	2	...	2	...	$n$	...	$n$
$v_2$	1	0	...	$n-2$	2	...	2	1	...	1	...	$n-1$	...	$n-1$
$\vdots$														
$v_n$	$n-1$	$n-2$	...	0	$n$	...	$n-1$	$n-1$	...	$n-1$	...	1	...	1
$u_1^1$	1	2	...	$n$	0	...	$m-1$	3	...	3	...	$n+1$	...	$n+1$
$u_2^1$	1	2	...	$n$	1	...	$m-2$	3	...	3	...	$n+1$	...	$n+1$
$\vdots$														
$u_m^1$	1	2	...	$n$	$m-1$	...	0	3	...	3	...	$n+1$	...	$n+1$
$u_1^2$	2	1	...	$n-1$	3	...	3	0	...	$m-1$	...	$n$	...	$n$
$u_2^2$	2	1	...	$n-1$	3	...	3	1	...	$m-2$	...	$n$	...	$n$
$\vdots$														
$u_m^2$	2	1	...	$n-1$	3	...	3	$m-1$	...	0	...	$n$	...	$n$
$\vdots$														
$u_1^n$	$n$	$n-1$	...	1	$n+1$	...	$n+1$	$n$	...	$n$	...	0	...	$m-1$
$u_2^n$	$n$	$n-1$	...	1	$n+1$	...	$n+1$	$n$	...	$n$	...	1	...	$m-2$
$\vdots$														
$u_m^n$	$n$	$n-1$	...	1	$n+1$	...	$n+1$	$n$	...	$n$	...	$m-1$	...	0

**Lema 4.** Diberikan  $P_n \odot P_m$  adalah graf lintasan korona lintasan dengan  $n \geq 3$  dan  $2 \leq m \leq 3$ , maka  $P_n \odot P_m$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $P_n \odot P_m$  adalah graf lintasan korona lintasan ber-order  $(1+m)n$ . Berdasarkan Gambar 3 diperoleh  $N_{P_n \odot P_m}[u_x^t] = N_{P_n \odot P_m}[u_y^t]$  dengan  $t = 1, 2, \dots, n$  dan  $x \neq y$  untuk  $x, y = 1, m$ . Sehingga  $u_x^t$  dan  $u_y^t$  merupakan *twin vertices*. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $P_n \odot P_m$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

Berdasarkan Lema 4.  $P_n \odot P_m$  untuk  $n \geq 3$  dan  $m \geq 4$  bukan merupakan graf berdimensi 2-metrik karena tidak memiliki *twin vertices*.

**Teorema 3.** Diberikan  $P_n \odot P_m$  adalah graf lintasan korona lintasan dengan  $n \geq 3$  dan  $2 \leq m \leq 3$ , maka berlaku  $dim_2(P_n \odot P_m) = 2n$ .

*Bukti.* Diketahui  $P_n \odot P_m$  adalah graf berdimensi 2-metrik dengan  $n \geq 3$  dan  $2 \leq m \leq 3$ , artinya terdapat basis 2-metrik pada  $P_n \odot P_m$ .

(1) Akan ditunjukkan bahwa  $dim_2(P_n \odot P_m) \leq 2n$ .

Misal himpunan  $S = \{u_x^t\}$  dengan  $t = 1, 2, \dots, n$  dan  $x = 1, m$ . Akan ditunjukkan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi dari setiap *vertex* di  $P_n \odot P_m$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(v_1|S) &= (1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n); \\
 r(v_2|S) &= (2, \dots, 2, 1, \dots, 1, \dots, n-1, \dots, n-1); \\
 &\vdots \\
 r(v_n|S) &= (n, \dots, n, n-1, \dots, n-1, \dots, 1, \dots, 1); \\
 r(u_1^1|S) &= (0, \dots, m-1, 3, \dots, 3, \dots, n+1, \dots, n+1); \\
 r(u_2^1|S) &= (1, \dots, m-2, 3, \dots, 3, \dots, n+1, \dots, n+1); \\
 &\vdots \\
 r(u_m^1|S) &= (m-1, \dots, 0, 3, \dots, 3, \dots, n+1, \dots, n+1); \\
 r(u_1^2|S) &= (3, \dots, 3, 0, \dots, m-1, \dots, n, \dots, n); \\
 r(u_2^2|S) &= (3, \dots, 3, 1, \dots, m-2, \dots, n, \dots, n); \\
 &\vdots \\
 r(u_m^2|S) &= (3, \dots, 3, m-1, \dots, 0, \dots, n, \dots, n); \\
 &\vdots \\
 r(u_1^n|S) &= (n+1, \dots, n+1, n, \dots, n, \dots, 0, \dots, m-1); \\
 r(u_2^n|S) &= (n+1, \dots, n+1, n, \dots, n, \dots, 1, \dots, m-2); \\
 &\vdots \\
 r(u_m^n|S) &= (n+1, \dots, n+1, n, \dots, n, \dots, m-1, \dots, 0).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(P_n \odot P_m)$  berlaku  $r(u|W) \neq r(v|W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik.

(2) Akan ditunjukkan bahwa  $dim_2(P_n \odot P_m) \geq 2n$ .

Misal himpunan  $S = \{u_x^t\}$  dengan  $t = 1, 2, \dots, n$  dan  $x = 1, m$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| = 2n$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < 2n$ , maka terdapat kemungkinan himpunan  $S = \{u_x^1, u_s^t\}$  dengan  $x = 1, m-1$ ,  $s = 2, 3, \dots, n$ , dan  $t = 1, m$ . Diperhatikan bahwa untuk setiap  $u, v \in V(P_n \odot P_m)$  terdapat  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  yang harus memenuhi  $r(u|W) \neq r(v|W)$  agar  $S$  menjadi pembangkit 2-metrik. Berdasarkan Tabel 3 diperoleh bahwa terdapat  $r(u|W) = r(v|W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $S \geq 2n$ .

Selanjutnya, diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik.

Berdasarkan (1) dan (2), terbukti bahwa  $\dim_2(P_n \odot P_m) = 2n$ .  $\square$

### KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai dimensi  $k$ -metrik pada graf  $CP_n$  dengan  $n \geq 3$  yaitu  $\dim_2(CP_n) = 2n$ , dimensi  $k$ -metrik pada graf  $B_{n,m_i}$  dengan  $n \geq 1$  dan  $m_i \geq 4$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$  yaitu  $\dim_2(B_{n,m_i}) = \sum_{i=1}^n (m_i - 2)$ , dan dimensi  $k$ -metrik pada graf  $P_n \odot P_m$  dengan  $n \geq 3$  dan  $2 \leq m \leq 3$  yaitu  $\dim_2(P_n \odot P_m) = 2n$ .

Saran bagi pembaca yang tertarik dengan topik dimensi  $k$ -metrik adalah memperluas materi dengan menerapkannya pada kelas-kelas graf lain ataupun graf yang diperoleh dengan menggunakan operasi-operasi lainnya. Kesempatan untuk meneliti dimensi  $k$ -metrik pada kelas-kelas graf masih besar, mengingat dimensi  $k$ -metrik pada suatu graf saat ini masih belum banyak diteliti.

### DAFTAR RUJUKAN

Estrada-Moreno, A., Rodriguez-Velazquez, J. A., & Yero, I. G. (2015). The  $k$ -Metric Dimension of a Graph. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 9: 2829-2840.

Estrada-Moreno, A., Rodriguez-Velazquez, J. A., & Yero, I. G. (2016). The  $k$ -Metric Dimension of Corona Product Graphs. *Bull. Malays. Math. Sci.*, 39(1), 135-136.

Harary, F., & Melter, R. A. (1977). Addendum to "On The Metric Dimension of A Graph" (*Ars Combinatoria* 2 (1976) 191-195). *Ars Combinatoria*, 4, 318.

Slater, P. J. (1975). Leaves of Trees. *Congr. Numer*, 14(549-559), 37.

Rahmadi, D., & Susanti, Y. (2018). Dimensi  $k$ -Metrik pada Graf Double Fan dan Beberapa Graf Terkait. *Tesis Departemen Matematika FMIPA UGM*, Yogyakarta.

Biggs, N., Biggs, N. L., & Norman, B. (1993). *Algebraic Graph Theory* (Vol. 67). Cambridge University Press.

Chen, W. C. (1997). HI Lü & YN Yeh, "Operations of Interlaced Trees and Graceful Trees". *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 21, 337-348.

Hidayah, N., & Kusmayadi, T. A. (2020). The  $k$ -Metric Dimension of Generalized Fan Graph and  $C_m * K_n$  Graph. In *SEMANTIK Conference of Mathematics Education (SEMANTIK 2019)*, 34-38. Atlantis Press.

Saidah, C. A. R., & Kusmayadi, T. A. (2020). The  $k$ -Metric Dimension of  $N_k + P_n$  Graph and Starbarbell Graph. In *SEMANTIK Conference of Mathematics Education (SEMANTIK 2019)*, 18-22. Atlantis Press.

Frucht, R. & F. Harary, (1970). On The Corona of Two Graphs. *Aequationes Math.* 4, 322-325.

Chartrand, G., & Zhang, P. (2009). *Chromatic Graph Theory*. CRC Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs & digraphs*, 6<sup>th</sup> ed. CRC Press.

## **PENERAPAN *CAPACITATED VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS* UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH PENDISTRIBUSIAN MANGGA PODANG DI KABUPATEN KEDIRI**

**Arfian Rizky Pratama<sup>1)</sup>, Bima Sayoga Putra<sup>2)</sup>, Nur Syahidah Binti Aulia<sup>3)</sup>, dan Sapti Wahyuningsih<sup>\*</sup>)**

<sup>1)</sup>*SI Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Malang*

*e-mail : pratamaarfian7@gmail.com*

<sup>2)</sup>*SI Teknologi Pendidikan, Fakultas Ilmu Pendidikan, Universitas Negeri Malang*

*e-mail : bimasayogap@gmail.com*

<sup>3)</sup>*SI Pendidikan Ekonomi, Fakultas Ekonomi dan Bisnis, Universitas Negeri Malang*

*e-mail : nsyahidahkrrj@gmail.com*

<sup>\*</sup>*Corresponding author : sapti.wahyuningsih.fmipa@um.ac.id*

### **Abstrak**

Pendistribusian mangga podang di Kabupaten Kediri terkendala oleh jumlah produksi yang tinggi, ketahanannya, dan kapasitas maksimum kendaraan yang dimiliki. Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan *Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows* dalam pendistribusian mangga podang sehingga menghasilkan rute dengan jarak total yang minimum tanpa melanggar kendala kapasitas kendaraan dan kendala waktu. Seluruh kegiatan ini dilakukan secara daring dengan mengolah data sekunder dengan alat bantu program TSP-VRP untuk pembentukan rute. Hasil penyelesaian membentuk rute dengan total jarak minimum dan banyak rute sehingga mengetahui minimal kendaraan serta lama hari yang dibutuhkan dalam pendistribusian. Hal tersebut menunjukkan pentingnya penerapan *Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows* dalam pendistribusian mangga podang.

**Kata kunci:** *Mangga podang, Pendistribusian, Vehicle routing problem*

### **PENDAHULUAN**

Di Kabupaten Kediri banyak sumber daya alam potensial salah satu di subsektor hortikultura. Mangga podang merupakan yang paling menjadi primadona di subsektor tersebut. Sentra produksi mangga podang di Kabupaten Kediri terdapat di Kecamatan Banyakan, Grogol, Tarokan, Mojo dan Semen. Menurut data Dinas Pertanian dan Perkebunan Kabupaten Kediri, produksi Mangga Podang terbanyak terdapat di Kecamatan Banyakan dengan jumlah 769.987 kwintal (Laily and Rizkiyah, 2015). Mangga podang merupakan buah musiman, tetapi setiap panen raya persediaan mumpuk. Sedangkan Mangga dalam keadaan segar hanya bertahan 7 hari pada kondisi suhu 28-30<sup>0</sup> (Amiarsi, 2013). Hal tersebut menuntut keefektifan dan keefisienan dalam pendistribusian. Tetapi belum ada artikel yang membahas pendistribusian mangga podang. Pendistribusian mangga podang ke konsumen ada dua yaitu dari petani langsung ke konsumen dan dari petani melewati pengepul lalu ke toko buah atau agen di daerah lain. Tetapi sulitnya melacak jenis pendistribusian yang dari petani langsung ke konsumen (Priyandari, - and -, 2015). Sehingga dalam artikel ini akan membahas khusus penyelesaian masalah penentuan rute pendistribusian mangga

podang dari pengepul ke toko buah, agen ataupun pusat pengolahan mangga podang yang menjadi pelanggannya. Tetapi keterbatasan kendaraan yang dimiliki merupakan salah masalah utama dalam pendistribusian mangga podang. Tujuan artikel ini adalah mencari varian *Vehicle Routing Problem* (VRP) yang sesuai untuk pendistribusian mangga podang di Kabupaten Kediri melalui literatur yang tersedia. Sehingga mendapatkan pemodelan dan penyelesaiannya mendekati kenyataan.

Bentuk VRP pertama kali dikenalkan sebagai masalah pendistribusian yang memodelkan sejumlah armada truk sejenis agar dapat melayani permintaan minyak dari sejumlah gas stasiun dari depot pusat dengan menghasilkan jarak tempuh minimum (Dantzig, G. B., and Ramser, 1959). Tetapi model VRP yang saat ini lebih kompleks karena banyak tambahan kendala dalam kehidupan nyata. Tambahan pada kendala pada VRP menyebabkan bertambah banyak variannya, yang terbaru yaitu elektrik VRP dengan kendala jendela waktu dan waktu tunggu pengisian daya batrai (Keskin, Çatay and Laporte, 2020) dan (Raeesi and Zografos, 2020). Ada 1021 artikel jurnal dengan VRP sebagai topik utama, diterbitkan pada tahun 1959-2008 (Eksioglu, Vural and Reisman, 2009). Selama itu literatur VRP telah tumbuh secara eksponensial pada tingkat 6% setiap tahun. Sedangkan selama tahun 2009-2013 ada 144 artikel jurnal yang membahas VRP (De Jaegere, Drefraeye and Van Nieuwenhuysse, 2016). Hal itulah yang menunjukkan seberapa menarik dan pentingnya VRP untuk diteliti dan dikembangkan.

Selain perkembangan varian, metode penyelesaian VRP juga berkembang sangat pesat. Beberapa metode terbaru yang terinspirasi oleh hewan, yaitu *An Improved Hybrid Firefly Algorithm* (Altabeed, Mohsen and Ghallab, 2019) dan *An Improved Ant Colony Optimization* (Wang *et al.*, 2020). Kemudian berkembang juga seperti perbaikan solusi menggunakan metode pencarian lokal pada varian VRPTW oleh (Wahyuningsih and Satyananda, 2020). Ada juga penyelesaian VRP dengan menggunakan alat bantu *drone* seperti dalam artikel (Schermer, Moeini and Wendt, 2019) dan (Deng, Amirjamshidi and Roorda, 2020). Perkembangan teknologi yang pesat disinyalir sebagai pemantik kemajuan penelitian dan pengembangan perangkat lunak komersial untuk VRP. Bahkan saat menurut survei ada ribuan perusahaan, salah satunya Perusahaan Coca-Cola saat ini menggunakan software VRP (Hall, 2012). Untuk lisensi 50 rute harganya diperkirakan \$ 20.000- \$ 40.000, bahkan lebih tinggi untuk tambahan fitur dan kendala yang diinginkan. Banyak penerapan VRP untuk pendistribusian diantaranya pendistribusian barang dengan banyak tujuan dalam keadaan darurat (Zahedi, Kargari and Husseinzadeh Kashan, 2020) dan pendistribusian di sektor farmasi (Campelo *et al.*, 2019) Semua ini menunjukkan sangat penting VRP dalam pendistribusian untuk perusahaan atau pelaku ekonomi lainnya.

Berdasarkan masalah pada pendistribusian mangga podang bahwa *Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows* (CVRPTW) merupakan varian paling sesuai untuk pendistribusian mangga podang. CVRPTW didefinisikan sebagai sistem distribusi terdiri dari depo induk dan sejumlah kendaraan dengan kapasitas yang sama, untuk melayani sejumlah pelanggan yang tersebar, setiap pelanggan memiliki batas waktu tertentu, permintaan mereka kurang dari kapasitas kendaraan, dan setiap pelanggan dikunjungi satu kali oleh satu kendaraan. Penelitian ini bertujuan menerapkan CVRPTW pada pendistribusian mangga podang sehingga menghasilkan rute dengan jarak total yang paling minimum tanpa melanggar kendala waktu dan kapasitas kendaraan.

## METODE

### Rancangan Penelitian

Penelitian ini memiliki tahap-tahap: (1) studi literatur, (2) pengolahan data, (3) analisis data.

### Model Matematika CVRPTW

*Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Window* digambarkan sebagai sebuah graph komplit  $G = (N, E)$  dengan  $N = \{0, 1, \dots, n\}$  adalah himpunan vertex dengan 0 mewakili depot dan  $N_c = N - \{0\}$  mewakili depot sedang  $E = \{(i, j), \forall i, j \in N | i < j\}$  adalah himpunan edge yang mewaliki jalan yang hubungkan dua vertex. dengan kapasitas armada adalah  $Q$ , setiap  $(i, j) \in E$  mempunyai biaya  $c_{ij}$  dan terikat oleh waktu tempuh  $t_{ij}$ . sedangkan setiap simpul  $i \in V - \{0\}$  terikat  $q_i$  (permintaan),  $s_i$  (waktu pelayanan) dan  $[a_i, b_i]$  (satu set jendela waktu) di pelanggan  $i$  (Jayarathna *et al.*, 2019). Formula CVRPTW:

$$\min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}^k$$

dengan:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{jika kendaraan kdijalankan dari titik } i \text{ ke titik } j, i \neq j \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Dengan batasan-batasan sebagai berikut:

1. Setiap pelanggan dikunjungi satu kali.  
 $\sum_{k \in V} \sum_{i \in N} x_{ij}^k = 1, \forall j \in N - \{0\}$
2. Total permintaan dari setiap pelanggan dalam satu rute tidak boleh melebihi kapasitas kendaraan.  
 $\sum_{i \in N - \{0\}} \sum_{j \in N} x_{ij}^k \leq Q, \forall k \in V$
3. Setiap kendaraan meninggalkan pelanggan yang telah dikunjungi.  
 $\sum_{i \in N} x_{ih}^k - \sum_{j \in N} x_{hj}^k = 0, \forall h \in N - \{0\}, \forall k \in V$
4. Setiap yang meninggalkan depot harus kembali ke depot.  
 $\sum_{j \in N} x_{j0}^k = 1, \forall k \in V$   
 $\sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1, \forall k \in V$
5. Kendaraan  $k$  tidak bisa ke depot  $j$  sebelum waktu yang ditentukan.  
 $s_{ik} + t_{ij} - K(1 - x_{ij}^k) \leq s_{jk}, \forall i, j \in N, \forall k \in V$
6. Kendaraan hanya bisa berada di pelanggan pada batasan yang ditentukan.  
 $a_i \leq s_{ik} \leq b_i, \forall i \in N, \forall k \in V$

### Algoritma Untuk Menyelesaikan CVRPTW

Artikel ini menggunakan alat bantu program TSP-VRP yang dikembangkan oleh Wahyuningsih dan Darmawan dengan penyelesaian menggunakan algoritma Sequential Insertion (Wahyuningsih dan Darmawan, 2020). Adapun tahap-tahap algoritma Sequential Insertion: inialisai untuk memilih kendaraan, dilanjutkan memilih pelanggan pertama untuk membentuk rute, dan selanjutnya menyisipkan pelanggan-pelanggan lain. Proses penyisipan tiap pelanggan disyaratkan dengan kriteria terbaik yaitu dengan batasan *time windows*, total muatan satu rute tidak melebihi kapasitas maksimum kendaraan dan menghasilkan total jarak yang paling minimum. Adapun data yang dibutuhkan untuk diinputkan ke aplikasi TSP-VRP dengan varian CVRPTW meliputi : banyaknya pelanggan, jarak depot dengan setiap pelanggan, jarak antar pelanggan, permintaan setiap pelanggan, kecepatan rata-rata kendaraan, jumlah kendaraan yang dimiliki, kapasitas kendaraan, waktu pelayanan, waktu buka dan tutup pelanggan dan depot.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Data

Untuk menunjukkan bahwa data pada salah satu pengepul di Kecamatan Banyakan, Reduksi Data dilakukan karena data beberapa pelanggan yang berada dalam desa yang sama. Sehingga pelanggan-pelanggan yang berada di desa sama dijadikan satu dengan menjumlahkan permintaanya, sekaligus memberi kode setiap pelanggan dan depot. Sehingga data setelah direduksi menjadi:

- Jumlah kendaraan : 1 truk dengan kapasitas 2200kg
- Waktu pengantaran : pukul 05.00-22.00 WIB
- Kecepatan rata-rata : 60 km/jam (dimisalkan)
- Waktu istirahat : 2 jam ( diestimasikan untuk isoma sopir dan pengisian BBM)

Kode titik	Pelanggan	Alamat	Permintaan (kg)	Lama pelayanan (menit)	waktu buka (WIB)	waktu tutup (WIB)
0	Depot awal	Goliman Parang Banyakan	-	120	05.00	22.00
1	Kandangan 1	Pasar kandangan	300	15	05.00	22.00
2	Ringinrejo 1	Sambi	200	10	05.00	22.00
3	Riginrejo 2	Selodono	100	5	05.00	22.00
4	Banyakan 1	Pasar buah	700	35	05.00	22.00
5	Banyakan 5	Tiron	400	20	05.00	22.00
6	Tarokan 1	Bangkerep	200	10	05.00	22.00
7	Kediri Kota 1	Pasar Ngronggo	500	25	05.00	22.00
8	Kediri Kota 4	Banjaran	100	5	05.00	22.00
9	Kediri Kota 5	Dandangan	100	5	05.00	22.00
10	Kras 1	Bendosari	200	10	05.00	22.00
11	Pare 1	Kampung inggris	200	10	05.00	22.00
12	Papar 1	Papar	200	10	05.00	22.00

Tabel 1. Data Pelanggan

Jarak antara depot dan pelanggan-pelanggan dan jarak antar pelanggan dengan bantuan google maps:

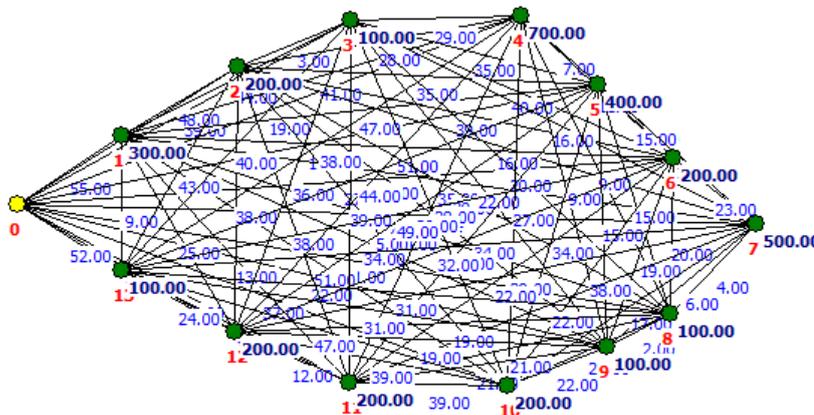
Jarak (Km)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	-	55	38	39	19	11	27	22	21	22	37	42	39	52
1	55	-	48	44	41	47	51	35	34	34	51	13	25	9
2	38	48	-	3	28	35	39	16	20	22	5	38	38	43
3	39	44	3	-	29	35	40	16	20	22	7	39	36	40

4	19	41	28	29	-	7	11	12	9	9	27	28	23	38
5	11	47	35	35	7	-	15	18	15	15	34	34	29	44
6	27	51	39	40	11	15	-	23	20	19	38	39	28	49
7	22	35	16	16	12	18	23	-	4	6	17	22	22	32
8	21	34	20	20	9	15	20	4	-	2	20	21	19	31
9	22	34	22	22	9	15	19	6	2	-	22	21	19	31
10	37	51	5	7	27	34	38	17	20	22	-	39	39	47
11	42	13	38	39	28	34	39	22	21	21	39	-	12	13
12	39	25	38	36	23	29	28	22	19	19	39	12	-	24
13	52	9	43	40	38	44	49	32	31	31	47	13	24	-

Tabel 2. Data Jarak

**Penyelesaian**

Setelah data jarak diinputkan ke alat bantu program TSP-VRP maka menghasilkan kemungkinan-kemungkinan rute dalam bentuk graph seperti berikut:



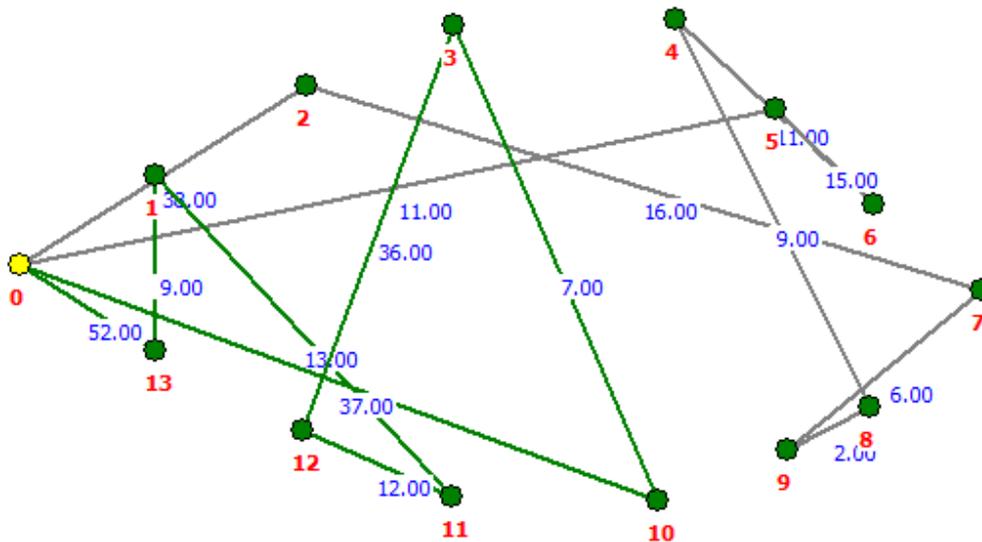
Gambar 1. Graph Input

Perhitungan menggunakan alat bantu aplikasi TSP-VRP yang menggunakan algoritma Sequential untuk menghasilkan rute pendistribusian terpendek, sehingga menghasilkan rute :

-Kendaraan 1 - Rute 1: { 0-2-7-9-8-4-6-5-0 } rute kendaraan 1 dengan sisi yang diberi warna hijau yang berawal dari titik 0 atau depot melayani sebanyak tujuh pelanggan dengan total permintaan: 2200 kg lalu kembali ke titik nol atau depot dengan waktu: 415 menit dan jarak: 108 km. pada graph hasil kendaraan 1 sisi yang menghubungkan titik 4 dan titik 6 dengan sisi yang menghubungkan titik 6 dan 5 berhimpit, sehingga urutan rute pada graph hasil rancu. Hal tersebut terjadi karena peletakan titik 4, titik 5 dan titik 6 terlalu berdekatan.

-Kendaraan 2 - Rute 1: { 0-13-1-11-12-3-10-0 }, rute kendaraan 2 dengan sisi yang diberi warna abu-abu yang berawal dari titik 0 atau depot melayani sebanyak enam pelanggan dengan total permintaan: 1100 kg lalu kembali ke titik nol atau depot dengan waktu: 409 menit dan jarak: 166 km.

Dua rute hasil perhitungan tersebut merupakan rute terpendek yang tidak melanggar batas kapasitas dan batas waktu.



Gambar 2. Graph Hasil

Hasil perhitungan TSP-VRP tersebut apabila diinterpretasi ke data pada Tabel 2 menunjukkan bahwa pendistribusian yang terdiri dari kendaraan 1 dengan rute: dari depot ke pelanggan Ringinrejo 1 -pelanggan Kediri Kota 1- pelanggan Kediri Kota 5- pelanggan Kediri Kota 4- pelanggan Banyakkan 1- pelanggan Tarokan 1- pelanggan Banyakkan 5- lalu kembali ke depot dan kendaraan 2 dengan rute : dari depot ke pelanggan Kepung- pelanggan Kandangan 1- pelanggan Pare 1- pelanggan Papar 1- pelanggan Ringinrejo 2- pelanggan Kras 1- lalu kembali ke depot, sehingga total jarak keseluruhan yaitu 274 km serta untuk melayani semua pelanggan dalam satu hari membutuhkan 2 kendaraan. Karena kendaraan yang dimiliki hanya satu maka pelanggan pada rute kedua dikirim besoknya atau bila menginginkan pendistribusian satu hari maka kendaraan yang dimiliki minimal 2 unit.

## KESIMPULAN DAN SARAN

### Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian kesimpulan dalam penelitian ini :

1. penerapan CVRPTW pada pendistribusian Mangga Podang dapat menghasilkan rute dengan jarak minimum tanpa melanggar kendala waktu dan kapasitas kendaraan.
2. Penerapan CVRPTW pada pendistribusian dapat meminimalkan penggunaan kendaraan
3. Penerapan CVRPTW pada pendistribusian dapat mengetahui minimal kendaraan yang dibutuhkan dan lama hari yang dibutuhkan dalam pendistribusian

### Saran

Terkait hal tersebut , penulis menyarankan :

1. Adanya penelitian lebih lanjut terkait pendistribusian mangga podang dengan menerapkan varian VRP lainya atau pendistribusian yang tidak melalui pengepul.
2. Artikel ini sebagai referensi untuk penelitian sejenis.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Altabeeb, A. M., Mohsen, A. M. and Ghallab, A. (2019) 'An improved hybrid firefly algorithm for capacitated vehicle routing problem', *Applied Soft Computing Journal*, 84, p. 105728. doi: 10.1016/j.asoc.2019.105728.
- Amiarsi, D. (2013) 'Pengaruh Konsentrasi Oksigen dan Karbondioksida Dalam Kemasan Terhadap Daya Simpan Buah Mangga Gedong', *Jurnal Hortikultura*, 22(2), p. 197. doi: 10.21082/jhort.v22n2.2012.p197-204.
- Campelo, P. *et al.* (2019) 'Consistent vehicle routing problem with service level agreements: A case study in the pharmaceutical distribution sector', *European Journal of Operational Research*, 273(1), pp. 131–145. doi: 10.1016/j.ejor.2018.07.030.
- Dantzig, G. B., and Ramser, J. H. (1959) 'Dantzig1959.Pdf', *Management Science*, pp. 80–91.
- Deng, P., Amirjamshidi, G. and Roorda, M. (2020) 'A vehicle routing problem with movement synchronization of drones, sidewalk robots, or foot-walkers', *Transportation Research Procedia*, 46(2019), pp. 29–36. doi: 10.1016/j.trpro.2020.03.160.
- Eksioglu, B., Vural, A. V. and Reisman, A. (2009) 'The vehicle routing problem: A taxonomic review', *Computers and Industrial Engineering*, 57(4), pp. 1472–1483. doi: 10.1016/j.cie.2009.05.009.
- Hall, R. W. (2012) 'Vehicle Routing Software Survey'. Available at: [http://www.orms-today.org/surveys/Vehicle\\_Routing/vrss.html](http://www.orms-today.org/surveys/Vehicle_Routing/vrss.html).
- De Jaegere, N., Drefraeye, M. and Van Nieuwenhuysse, I. (2016) 'The vehicle routing problem: State of the art classification and review', *Computers and Industrial Engineering*, 99, pp. 300–313. doi: 10.1016/j.cie.2015.12.007.
- Jayarathna, D.G.N.D., G.H.J. Lanel., Z.A.M.S.Juman., C.A.Kankanamge.2019. 'MODELING Of an Optimal Outbound Logistics System (Contemporary Review Study on Effect of Vehicle Routing ,Facility Location and Locational Routing Problems'. *IJHSSI*, p.2319-7714.
- Keskin, M., Çatay, B. and Laporte, G. (2020) 'A Simulation-Based Heuristic for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows and Stochastic Waiting Times at Recharging Stations', *Computers & Operations Research*, p. 105060. doi: 10.1016/j.cor.2020.105060.
- Khachay, M. and Ogorodnikov, Y. (2019) 'Towards an efficient approximability for the Euclidean capacitated vehicle routing problem with time windows and multiple depots', *IFAC-PapersOnLine*, 52(13), pp. 2644–2649. doi: 10.1016/j.ifacol.2019.11.606.
- Laily, D. W. and Rizkiyah, N. (2015) 'Penguatan Strategi Pengembangan Ekonomi Lokal Melalui Agropolitan Komoditas Unggulan Buah Mangga Podang di Kabupaten Kediri', in *Journal of Chemical Information and Modeling*, pp. 1689–1699. doi: 10.1017/CBO9781107415324.004.
- Priyandari, Y., -, Y. and -, E. (2015) 'Desain Model Sistem Ketertelusuran Buah-Buahan di Tingkat Petani Menggunakan Teknologi RFID', *PERFORMA : Media Ilmiah Teknik Industri*, 14(2), pp. 171–182. doi: 10.20961/performa.14.2.11500.
- Qodhdhar, M. N., Deoranto, P. and Anggarini, S. (2013) 'STUDI PREFERENSI KONSUMEN TERHADAP PASTA MANGGA PODANG ( Mangifera indica L .) DENGAN METODE CONJOINT ( STUDI KASUS PADA HOTEL-HOTEL DI KOTA BATU ) STUDY OF CONSUMER

- PREFERENCE TOWARDS PODANG MANGO PASTE ( *Mangifera indica* L.) WITH CONJOINT METHODS ( CAS', *Jurnal Industria*, 2(1), pp. 17–26.
- Raeesi, R. and Zografos, K. G. (2020) 'The electric vehicle routing problem with time windows and synchronised mobile battery swapping', *Transportation Research Part B: Methodological*, 140, pp. 101–129. doi: 10.1016/j.trb.2020.06.012.
- Schermer, D., Moeini, M. and Wendt, O. (2019) 'A matheuristic for the vehicle routing problem with drones and its variants', *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 106(June), pp. 166–204. doi: 10.1016/j.trc.2019.06.016.
- Wahyuningsih, S. *et al.* (2019) 'Vehicle Routing Problem with Time Windows Variants and its Application in Distribution Optimization', pp. 24–35.
- Wahyuningsih, S. and Satyananda, D. (2020) 'Improvement of solution using local search method by perturbation on VRPTW variants', *Journal of Physics: Conference Series*, 1581(1). doi: 10.1088/1742-6596/1581/1/012004.
- Wang, Y. *et al.* (2020) 'An Improved Ant Colony Optimization algorithm to the Periodic Vehicle Routing Problem with Time Window and Service Choice', *Swarm and Evolutionary Computation*, 55(November 2018). doi: 10.1016/j.swevo.2020.100675.
- Zahedi, A., Kargari, M. and Husseinzadeh Kashan, A. (2020) 'Multi-objective decision-making model for distribution planning of goods and routing of vehicles in emergency multi-objective decision-making model for distribution planning of goods and routing of vehicles in emergency', *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 48(March), p. 101587. doi: 10.1016/j.ijdr.2020.101587.

## DIMENSI $k$ -METRIK PADA GRAF MUSICAL, GRAF TURAN, DAN GRAF CYCLE CORONA GRAF COMPLETE BIPARTITE

Erikha Feriyanto<sup>1)</sup>, Tri Atmojo Kusmayadi<sup>2)</sup>

<sup>1,2)</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sebelas Maret,  
Jl. Ir. Sutami no. 36A, Surakarta, Indonesia  
Email: feriyantoerik12@gmail.com

### Abstrak

Diberikan graf terhubung dan sederhana  $G$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan *vertex* dan  $E(G)$  adalah himpunan *edge*. Jarak antara dua *vertex*  $u$  dan *vertex*  $v$  dalam graf  $G$  adalah panjang *path* terpendek antara *vertex*  $u$  dan *vertex*  $v$  yang dinotasikan dengan  $d(u,v)$ . Misalkan bilangan bulat positif  $k$ ,  $S \subseteq V(G)$  dimana  $S$  merupakan pembangkit  $k$ -metrik jika dan hanya jika untuk setiap pasangan *vertex* berbeda  $u,v \in V(G)$  terdapat  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq S$  dan memenuhi  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  dengan  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Kardinalitas minimum dari pembangkit  $k$ -metrik suatu graf  $G$  disebut basis  $k$ -metrik dari graf  $G$ . Banyak elemen pada basis  $k$ -metrik graf  $G$  disebut dimensi  $k$ -metrik graf  $G$  dinotasikan dengan  $\dim_k(G)$ . Dalam penelitian ini diperoleh dimensi  $k$ -metrik pada graf *musical*, graf *turan*, dan graf *cycle corona graf complete bipartite*.

**Kata Kunci** : dimensi  $k$ -metrik, graf *musical*, graf *turan*, graf *cycle*, graf *complete bipartite*, *corona*.

### PENDAHULUAN

Matematika merupakan cabang ilmu yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang ilmu matematika yang sering diterapkan adalah teori graf. Menurut Diestel [8] teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736. Berangkat dari sebuah masalah warga kota Königsberg, pada kota tersebut terdapat empat daratan yang dipisahkan oleh sungai. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Kemudian warga kota tersebut ingin melewati semua jembatan tepat sekali dan kembali ke tempat semula. Euler membuktikan, bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi. Sejak saat itu, teori berkembang pesat dengan penelitian-penelitian beserta temuan-temuan baru terkait teori graf.

Menurut Chartrand *et al.* [2], suatu graf  $G$  adalah himpunan tak kosong berhingga dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah himpunan *vertex* dan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  adalah himpunan *edge* yang menghubungkan anggota - anggota  $V(G)$  secara tidak berurutan. Pada teori graf terdapat istilah dimensi metrik, diperkenalkan oleh Harary dan Melter [5] pada tahun 1976 menyebutkan himpunan pembeda sebagai *resolving set*. Misal  $G$  adalah graf terhubung dengan  $V(G)$  adalah himpunan *vertex* dan  $E(G)$  adalah himpunan *edge*, didefinisikan suatu himpunan  $W \subseteq V(G)$  sebagai himpunan pembeda dari setiap *vertex* pada graf  $G$  sedemikian sehingga untuk sembarang *vertex*  $u, v \in V(G)$  dan suatu *vertex*  $x \in W$  berlaku  $d(u, x) \neq d(v, x)$ . Dengan  $d(u, x)$  adalah panjang *path* terpendek dari *vertex*  $u$  ke *vertex*  $x$ . Himpunan pembeda dengan jumlah anggota minimal disebut basis metrik dari  $G$  dan banyaknya anggota dari basis di  $G$  disebut dimensi metrik dari  $G$  yang dinotasikan  $\dim(G)$  (Chartrand *et al.* [6]).

Seiring perkembangan penelitian dalam teori graf untuk memperluas konsep dari dimensi metrik telah muncul konsep baru yaitu dimensi  $k$ -metrik. Tahun 2015

Estrada-Moreno *et al.* [3] telah memperkenalkan tentang dimensi  $k$ -metrik. Misal  $G$  adalah graf terhubung dan sederhana, himpunan  $S \subseteq V(G)$  disebut sebagai pembangkit  $k$ -metrik pada  $G$  jika dan hanya jika untuk setiap pasang  $vertex$  yang berbeda  $u, v \in V(G)$ , terdapat paling sedikit  $k$   $vertex$   $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$  sedemikian sehingga  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  untuk setiap  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Pembangkit  $k$ -metrik dengan jumlah anggota minimal disebut basis  $k$ -metrik dan banyaknya anggota dari basis  $k$ -metrik disebut dimensi  $k$ -metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan  $\dim_k(G)$ .

Tahun 2015, Estrada-Moreno *et al.* [3] telah menemukan dimensi  $k$ -metrik pada graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf pohon (*tree*), dan graf hasil operasi *join* dengan titik-titik pada masing-masing graf merupakan *twin vertices*. Tahun 2018 Rahmadi [7] telah mendapatkan dimensi  $k$ -metrik pada graf *double fan*, graf *double cones*, graf *double fan snake*, graf *double fan* terpusat, graf parasut diperumum, dan graf parasut diperumum dengan *path* atas. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk menentukan dimensi  $k$ -metrik dari beberapa kelas graf yang belum pernah diteliti sebelumnya. Untuk graf yang tidak semua  $vertex$  nya merupakan *twin vertices* belum ditemukan nilai dimensi  $k$ -metriknya. Dalam penelitian ini, kelas graf yang diteliti adalah graf *musical*  $MG_n$ , graf *uran*  $T_{(g,j)}$ , dan graf *cycle corona* graf *complete bipartite*  $(C_m \odot K_{(n,i)})$ .

## METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku, jurnal maupun tulisan-tulisan yang dimuat di situs web. Dari metode ini, dapat ditentukan dimensi  $k$ -metrik pada graf  $MG_n$ , graf  $T_{(g,j)}$ , dan graf  $C_m \odot K_{(n,i)}$ .

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut. Langkah pertama dalam menentukan dimensi  $k$ -metrik pada graf  $MG_n$ , graf  $T_{(g,j)}$ , dan graf  $C_m \odot K_{(n,i)}$  adalah memahami karakteristik dimensi  $k$ -metrik pada graf tersebut. Setelah mengetahui nilai  $k$ , langkah kedua adalah menentukan pembangkit  $k$ -metrik  $S$  pada graf yang merupakan himpunan bagian dari himpunan  $vertex$  pada graf. Langkah ketiga adalah menghitung jarak setiap  $vertex$  terhadap  $S$  yang telah ditentukan, sedemikian sehingga setiap  $vertex$  pada graf mempunyai representasi yang berbeda terhadap  $S$ . Berdasarkan pembangkit  $k$ -metrik  $S$  yang telah diperoleh, langkah keempat adalah menentukan  $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$  sedemikian sehingga  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  untuk setiap  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Selanjutnya langkah kelima adalah menentukan basis  $k$ -metrik pada graf dengan memilih kardinalitas minimum dari pembangkit  $k$ -metrik. Langkah keenam adalah menentukan dimensi  $k$ -metrik dan rumus umum dimensi  $k$ -metrik pada graf berdasarkan basis  $k$ -metrik. Langkah ketujuh adalah membangun lema dan/atau teorema beserta pembuktian berdasarkan hasil yang diperoleh. Langkah terakhir adalah membuat kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut diberikan definisi dan lema pendukung yang berperan dalam menentukan dimensi  $k$ -metrik pada graf *musical*, graf *uran*, dan graf *cycle corona* graf *complete bipartite*.

**Definisi 1.** [1] Jarak atau *distance* dari  $vertex$   $u$  ke  $vertex$   $v$  pada graf  $G$  adalah panjang *path* terpendek dari  $vertex$   $u$  ke  $vertex$   $v$ , yang dinotasikan dengan  $d(u, v)$ .

**Definisi 2.** [2] Graf *cycle* yang dinotasikan dengan  $C_n$  adalah graf terhubung sederhana yang setiap  $vertex$ -nya ber-*degree* 2.

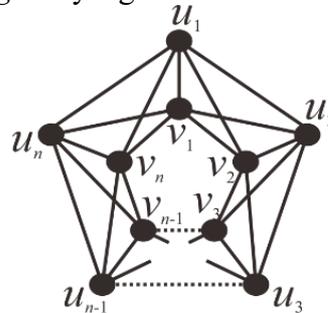
**Definisi 3.** [10] Graf *complete bipartite* adalah graf yang himpunan  $vertex$ -vertexnya

dapat dipartisi menjadi dua himpunan yang saling asing sedemikian sehingga tidak ada dua vertex yang saling adjacent pada himpunan yang sama, tetapi setiap pasang vertex pada dua himpunan saling adjacent.

**Definisi 4.** [11] Corona dari suatu graf  $G$  dengan graf  $H$  yang dinotasikan dengan  $G \odot H$  adalah graf yang terbentuk dari graf  $G$  dan  $|V(G)|$  salinan graf  $H$ , yaitu  $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ , kemudian menghubungkan setiap vertex  $u_i \in V(G)$  ke semua vertex dari  $V(H_i)$ , untuk  $1 \leq i \leq |V(G)|$ .

**Lema 1.** [3] Diberikan graf  $G$  dengan order  $n \geq 2$ . Graf  $G$  adalah graf berdimensi 2-metrik jika dan hanya jika  $G$  mempunyai twin vertices.

Menurut Knuth [4] graf *musical* yang dinotasikan dengan  $MG_n$  adalah graf dengan order  $2n$  yang disusun berdasarkan tangga nada. Ilustrasi graf *musical* ditunjukkan pada Gambar 1. Order pada graf *musical* merepresentasikan tangga nada. Misal  $Mg_n$  adalah graf *musical* yang terdiri dari himpunan vertex  $V(MG_n) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$  dengan  $n \geq 3$ . Terlihat bahwa graf *musical* merupakan graf 5-regular yang terdiri dari salinan dua graf cycle  $C_n$ .



Gambar 1. Graf *musical*  $MG_n$

Berikut diberikan Tabel 1 jarak setiap dua vertex berbeda pada graf *musical*.

Tabel 1. Jarak setiap dua vertex berbeda pada graf *musical*

Jarak	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\dots$	$u_{n-1}$	$u_n$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$\dots$	$v_{n-1}$	$v_n$
$u_1$	0	1	2	$\dots$	2	1	1	1	2	$\dots$	2	1
$u_2$	1	0	1	$\dots$	3	2	1	1	1	$\dots$	3	2
$u_3$	2	1	0	$\dots$	4	3	2	1	1	$\dots$	4	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u_{n-1}$	2	3	4	$\dots$	0	1	2	3	4	$\dots$	1	1
$u_n$	1	2	3	$\dots$	1	0	1	2	3	$\dots$	1	1
$v_1$	1	1	2	$\dots$	2	1	0	1	2	$\dots$	2	1
$v_2$	1	1	1	$\dots$	3	2	1	0	1	$\dots$	3	2
$v_3$	2	1	1	$\dots$	4	3	2	1	0	$\dots$	4	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{n-1}$	2	3	4	$\dots$	1	1	2	3	4	$\dots$	0	1
$v_n$	1	2	3	$\dots$	1	1	1	2	3	$\dots$	1	0

Berikut diberikan lema dan teorema yang berkaitan dengan dimensi  $k$ -metrik pada graf *musical*.

**Lema 2.**  $MG_n$  adalah graf *musical* dengan  $n \geq 3$  maka  $MG_n$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $MG_n$  adalah graf *musical* ber-order  $2n$ . Berdasarkan Gambar 1 diperoleh bahwa  $N_{MG_n}[u_p] = N_{MG_n}[v_q]$ , dengan  $p, q = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $p = q$ , sehingga  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$  merupakan *twin vertices*. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $MG_n$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Lema 3.** Diberikan  $MG_n$  adalah graf *musical* dengan  $n \geq 3$ . Jika  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dari  $MG_n$  maka  $|S| \geq 2n$ .

*Bukti.* Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(MG_n)$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) \neq r(v, W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < 2n$ . Misal  $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n\}$  dan  $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ . Didefinisikan  $S_1 = S \cap V_1$  dan  $S_2 = S \cap V_2$ , oleh karena  $|S_1| + |S_2| < 2n$  maka terdapat  $u, v \in V_1 \setminus S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) = r(v, W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq 2n$ .

$\square$

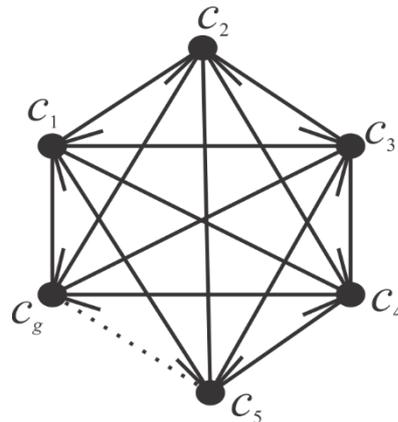
**Teorema 1.** Diberikan graf *musical*  $MG_n$  dengan  $n \geq 3$ , maka  $\dim_2(MG_n) = 2n$ .

*Bukti.* Menurut Lema 2 diketahui bahwa  $MG_n$  adalah graf berdimensi 2-metrik untuk  $n \geq 3$ , artinya terdapat basis 2-metrik pada  $MG_n$ . Misalkan himpunan  $S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ . Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $MG_n$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(u_1|S) &= (0, 1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 1, 2, \dots, 2, 1) \\
 r(u_2|S) &= (1, 0, 1, \dots, 3, 2, \dots, 1, 1, 1, \dots, 3, 1) \\
 r(u_3|S) &= (2, 1, 0, \dots, 4, 3, \dots, 2, 1, 1, \dots, 4, 3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_{n-1}|S) &= (2, 3, 4, \dots, 0, 1, \dots, 2, 3, 4, \dots, 1, 1) \\
 r(u_n|S) &= (1, 2, 3, \dots, 1, 0, \dots, 1, 2, 3, \dots, 1, 1) \\
 r(v_1|S) &= (1, 1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, 2, 1) \\
 r(v_2|S) &= (1, 1, 1, \dots, 3, 2, \dots, 1, 0, 1, \dots, 3, 2) \\
 r(v_3|S) &= (2, 1, 1, \dots, 4, 3, \dots, 2, 1, 0, \dots, 4, 3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_{n-1}|S) &= (2, 3, 4, \dots, 1, 1, \dots, 2, 3, 4, \dots, 0, 1) \\
 r(v_n|S) &= (1, 2, 3, \dots, 1, 1, \dots, 1, 2, 3, \dots, 1, 0)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(MG_n)$  berlaku  $r(u, W) \neq r(v, W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya berdasarkan Lema 3 diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Jadi, didapat  $\dim_2(MG_n) = 2n$ .  $\square$

Menurut Gross [9] graf *turan* yang dinotasikan dengan  $T_{(g,j)}$  adalah graf lengkap  $j$ -partisi dengan  $g$  *vertex* yang himpunan-himpunan partisinya sedekat mungkin dalam kardinalitas. Misal  $T_{(g,j)}$  adalah graf *turan* yang terdiri dari himpunan *vertex*  $V(T_{(g,j)}) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots, c_g\}$  dengan banyaknya partisi sejumlah  $j$ . Ilustrasi graf *turan* ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf turan  $T_{(g,j)}$

Berikut diberikan Tabel 2 jarak setiap dua *vertex* berbeda pada graf *turan*.

Tabel 2. Jarak setiap dua *vertex* berbeda pada graf *turan*

Jarak	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	...	$c_g$
$c_1$	0	1	1	1	1	...	1
$c_2$	1	0	1	1	1	...	1
$c_3$	1	1	0	1	1	...	1
$c_4$	1	1	1	0	1	...	1
$c_5$	1	1	1	1	0	...	1
$\vdots$							
$c_g$	1	1	1	1	1	...	0

Berikut diberikan lema dan teorema yang berkaitan dengan dimensi  $k$ -metrik pada graf *turan*.

**Lema 4.** Diberikan  $T_{(g,j)}$  adalah graf *turan* dengan  $g \geq 2$  dan  $j \geq 2$  maka  $T_{(g,j)}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $T_{(g,j)}$  adalah graf *turan* ber-order  $g$ . Berdasarkan Gambar 2 diperoleh bahwa  $N_{T_{(g,j)}}[c_1] = N_{T_{(g,j)}}[c_2] = \dots = N_{T_{(g,j)}}[c_g]$ , sehingga  $c_1, c_2, \dots, c_g$  merupakan *twin vertices*. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $T_{(g,j)}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Lema 5.** Diberikan  $T_{(g,j)}$  adalah graf *turan* dengan  $g \geq 2$ , ganjil dan  $j = \frac{(g+1)}{2}$ . Jika  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dari  $T_{(g,j)}$  maka  $|S| \geq (g - 1)$ .

*Bukti.* Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) \neq r(v, W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (g - 1)$  maka terdapat kemungkinan himpunan  $S$  yaitu,  $S \subseteq \{c_{p_i} | 1 \leq i \leq (g-1)-1\}$  dengan  $p_i \in \{1, 2, \dots, g\}$ . Diperhatikan bahwa untuk setiap  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  terdapat  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  yang harus memenuhi  $r(u, W) \neq r(v, W)$  agar  $S$  menjadi pembangkit 2-metrik. Berdasarkan Tabel 2. diperoleh bahwa terdapat  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  sedemikian sehingga  $r(u, W) = r(v, W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan

demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq (g - 1)$ .

□

**Lema 6.** Diberikan  $T_{(g,j)}$  adalah graf turan dengan  $g \geq 2$  dan  $j \geq 2$ . Jika  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dari  $T_{(g,j)}$  maka  $|S| \geq g$ .

*Bukti.* Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) \neq r(v, W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < g$  maka terdapat kemungkinan himpunan  $S$  yaitu,  $S \subseteq \{c_{p_i} | 1 \leq i \leq g-1\}$  dengan  $p_i \in \{1, 2, \dots, g\}$ . Diperhatikan bahwa untuk setiap  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  terdapat  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  yang harus memenuhi  $r(u, W) \neq r(v, W)$  agar  $S$  menjadi pembangkit 2-metrik. Berdasarkan Tabel 2. diperoleh bahwa terdapat  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  sedemikian sehingga  $r(u, W) = r(v, W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq g$ . □

**Teorema 2.** Diberikan graf turan  $T_{(g,j)}$  dengan  $g \geq 2$  dan  $j \geq 2$ , maka

$$\dim_2(T_{(g,j)}) = \begin{cases} (g-1), & \text{untuk } g = \text{ganjil dan } j = \frac{(g+1)}{2}; \\ g, & \text{untuk } g \geq 2 \text{ dan } j \geq 2. \end{cases}$$

*Bukti.* Menurut Lema 4 diketahui bahwa  $T_{(g,j)}$  adalah graf berdimensi 2-metrik untuk  $g \geq 2$  dan  $j \geq 2$ , artinya terdapat basis 2-metrik pada  $T_{(g,j)}$ . Dalam hal ini, pembuktian dibagi menjadi dua kasus menurut nilai  $g$  dan  $j$ .

1. Untuk  $g = \text{ganjil}$  dan  $j = \frac{(g+1)}{2}$ .

Misal dikonstruksikan himpunan  $S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots, c_{g-1}\}$ . Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $T_{(g,j)}$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(c_1|S) &= (0, 1, 1, 1, 1, \dots, 1) \\ r(c_2|S) &= (1, 0, 1, 1, 1, \dots, 1) \\ r(c_3|S) &= (1, 1, 0, 1, 1, \dots, 1) \\ r(c_4|S) &= (1, 1, 1, 0, 1, \dots, 1) \\ r(c_5|S) &= (1, 1, 1, 1, 0, \dots, 1) \\ &\vdots = \vdots \\ r(c_{g-1}|S) &= (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 0) \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(T_{(g,j)})$  berlaku  $r(u, W) \neq r(v, W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya berdasarkan Lema 5 diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Jadi, didapat  $\dim_2(T_{(g,j)}) = (g - 1)$ .

□

2. Untuk  $g \geq 2$  dan  $j \geq 2$ .

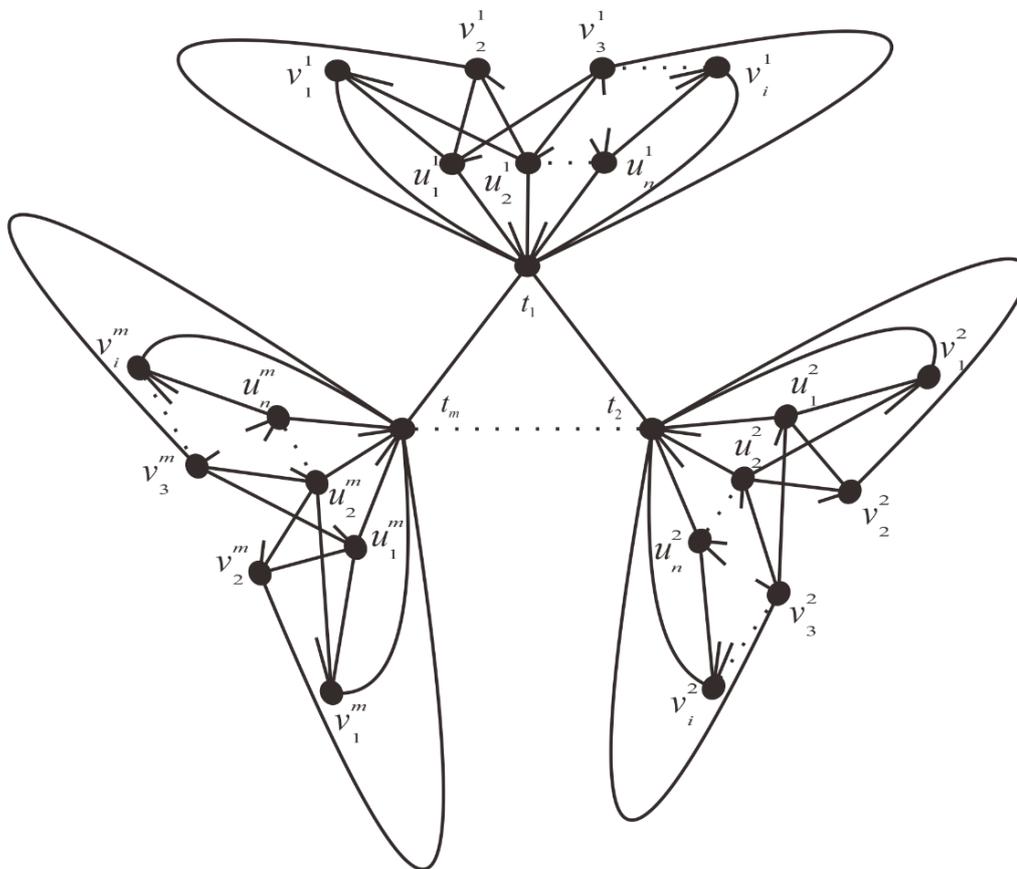
Misal dikonstruksikan himpunan  $S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \dots, c_g\}$ . Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $T_{(g,j)}$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(c_1|S) &= (0, 1, 1, 1, 1, \dots, 1) \\ r(c_2|S) &= (1, 0, 1, 1, 1, \dots, 1) \\ r(c_3|S) &= (1, 1, 0, 1, 1, \dots, 1) \\ r(c_4|S) &= (1, 1, 1, 0, 1, \dots, 1) \\ r(c_5|S) &= (1, 1, 1, 1, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \vdots \\ r(c_g|S) &= (1,1,1,1,1,\dots,0) \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(T_{(g,i)})$  berlaku  $r(u, W) \neq r(v, W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya berdasarkan Lema 6 diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Jadi, didapat  $\dim_2(T_{(g,i)}) = g$ .  $\square$

Graf  $C_m \odot K_{(n,i)}$  merupakan graf hasil operasi *corona* dari graf *cycle*  $C_m$  dengan graf *complete bipartite*  $K_{(n,i)}$  dapat dilihat pada Gambar 3. Graf  $C_m \odot K_{(n,i)}$  dengan  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$ , dan  $i \geq 1$  yaitu suatu graf hasil dari operasi *corona* atau graf yang terbentuk dari graf  $C$  dan  $|V(C)|$  salinan graf  $K$ , yaitu  $K_1, K_2, \dots, K_{|V(C)|}$ , kemudian menghubungkan setiap *vertex*  $t_j \in V(C)$  ke semua *vertex* dari  $V(K_j)$ , untuk  $1 \leq j \leq |V(C)|$ .



Gambar 3. Graf *cycle*  $C_m$  *corona* graf *complete bipartite*  $K_{(n,i)}$  ( $C_m \odot K_{(n,i)}$ )

Berikut diberikan lema dan teorema yang berkaitan dengan dimensi  $k$ -metrik pada graf *cycle*  $C_m$  *corona* graf *complete bipartite*  $K_{(n,i)}$  ( $C_m \odot K_{(n,i)}$ ).

**Lema 7.** Diberikan  $C_m \odot K_{(n,i)}$  merupakan graf *cycle*  $C_m$  *corona* graf *complete bipartite*  $K_{(n,i)}$  dengan  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$  dan  $i \geq 1$  maka  $C_m \odot K_{(n,i)}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $C_m \odot K_{(n,i)}$  merupakan graf hasil operasi *corona* dari graf *cycle*  $C_m$  dengan graf *complete bipartite*  $K_{(n,i)}$  dengan *order*  $m + m(n + i)$ . Berdasarkan Gambar 3 diperoleh bahwa  $N_{C_m \odot K_{(n,i)}}(u_1^j) = N_{C_m \odot K_{(n,i)}}(u_2^j) = \dots = N_{C_m \odot K_{(n,i)}}(u_n^j)$ , dan  $N_{C_m \odot K_{(n,i)}}(v_1^j) = N_{C_m \odot K_{(n,i)}}(v_2^j) = \dots = N_{C_m \odot K_{(n,i)}}(v_i^j)$ , dengan  $j=1, 2, \dots, m$ .

Dengan demikian *vertex*  $u_1^j, u_2^j, \dots, u_n^j, v_1^j, v_2^j, \dots, v_i^j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, m$ , merupakan *twin vertices*. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $C_m \odot K_{(n,i)}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Lema 8.** Diberikan  $C_m \odot K_{(n,i)}$  merupakan graf cycle  $C_m$  corona graf complete bipartite  $K_{(n,i)}$  dengan  $m \geq 3, n \geq 1$  dan  $i \geq 1$ . Jika  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dari  $C_m \odot K_{(n,i)}$  maka

- (1)  $|S| \geq (m \times n)$  untuk  $i = 1$  dan  $n > 1$ .
- (2)  $|S| \geq (m \times i)$  untuk  $n = 1$  dan  $i > 1$ .
- (3)  $|S| \geq (m \times (n + i))$  untuk  $i \geq 1$  dan  $n \geq 1$ .

*Bukti.*

(1) Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(C_m \odot K_{(n,i)})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) \neq r(v, W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (m \times n)$ . Misal  $V_1 = \{u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1\}, V_2 = \{u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2\}$ , dan  $V_3 = \{u_1^m, u_2^m, \dots, u_n^m\}$ . Didefinisikan  $S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2$ , dan  $S_3 = S \cap V_3$  oleh karena  $|S_1| + |S_2| + |S_3| < (m \times n)$  maka terdapat  $u, v \in V_1 \setminus S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) = r(v, W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq (m \times n)$ .

(2) Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(C_m \odot K_{(n,i)})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) \neq r(v, W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (m \times i)$ . Misal  $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_i^1\}, V_2 = \{v_1^2, v_2^2, v_3^2, \dots, v_i^2\}$ , dan  $V_3 = \{v_1^m, v_2^m, v_3^m, \dots, v_i^m\}$ . Didefinisikan  $S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2$ , dan  $S_3 = S \cap V_3$  oleh karena  $|S_1| + |S_2| + |S_3| < (m \times i)$  maka terdapat  $u, v \in V_1 \setminus S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) = r(v, W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq (m \times i)$ .

(3) Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(C_m \odot K_{(n,i)})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) \neq r(v, W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (m \times (n + i))$ . Misal  $V_1 = \{u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1, v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_i^1\}, V_2 = \{u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2, v_1^2, v_2^2, v_3^2, \dots, v_i^2\}$ , dan  $V_3 = \{u_1^m, u_2^m, \dots, u_n^m, v_1^m, v_2^m, v_3^m, \dots, v_i^m\}$ . Didefinisikan  $S_1 = S \cap V_1, S_2 = S \cap V_2$ , dan  $S_3 = S \cap V_3$  oleh karena  $|S_1| + |S_2| + |S_3| < (m \times (n + i))$  maka terdapat  $u, v \in V_1 \setminus S$  sedemikian sehingga  $r(u, W) = r(v, W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq (m \times (n + i))$ .  $\square$

**Teorema 3.** Misal  $C_m \odot K_{(n,i)}$  adalah graf cycle  $C_m$  corona graf complete bipartite  $K_{(n,i)}$  dengan  $m \geq 3, n \geq 1$  dan  $i \geq 1$ , maka

$$\dim_2(C_m \odot K_{(n,i)}) = \begin{cases} (m \times n), & i = 1 \text{ dan } n > 1; \\ (m \times i), & n = 1 \text{ dan } i > 1; \\ (m \times (n + i)), & i \geq 1 \text{ dan } n \geq 1. \end{cases}$$

*Bukti.* Menurut Lema 7 diketahui bahwa  $C_m \odot K_{(n,i)}$  adalah graf berdimensi 2-metrik untuk  $m \geq 3, n \geq 1$  dan  $i \geq 1$ , artinya terdapat basis 2-metrik pada  $C_m \odot K_{(n,i)}$ . Dalam

hal ini, pembuktian dibagi menjadi tiga kasus menurut nilai  $i$  dan  $n$ .

(1) Untuk  $i = 1$  dan  $n > 1$ .

Misal dikonstruksikan  $S = \{u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1, u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2, u_1^m, u_2^m, \dots, u_n^m\}$ . Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $C_m \odot K_{(n,i)}$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(t_1|S) &= (1,1,\dots,1,2,2,\dots,2,2,2,\dots,2) \\
 r(t_2|S) &= (2,2,\dots,2,1,1,\dots,1,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(t_m|S) &= (2,2,\dots,2,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1) \\
 r(u_1^1|S) &= (0,2,\dots,2,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(u_2^1|S) &= (2,0,\dots,2,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^1|S) &= (2,2,\dots,0,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(u_1^2|S) &= (3,3,\dots,3,0,2,\dots,2,4,4,\dots,4) \\
 r(u_2^2|S) &= (3,3,\dots,3,2,0,\dots,2,4,4,\dots,4) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^2|S) &= (3,3,\dots,3,2,2,\dots,0,4,4,\dots,4) \\
 r(u_1^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,0,2,\dots,2) \\
 r(u_2^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,2,0,\dots,2) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,2,2,\dots,0) \\
 r(v_1^1|S) &= (1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(v_2^1|S) &= (1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(v_3^1|S) &= (1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_i^1|S) &= (1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(v_1^2|S) &= (3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,4,4,\dots,4) \\
 r(v_2^2|S) &= (3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,4,4,\dots,4) \\
 r(v_3^2|S) &= (3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,4,4,\dots,4) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_i^2|S) &= (3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,4,4,\dots,4) \\
 r(v_1^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,1,1,\dots,1) \\
 r(v_2^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,1,1,\dots,1) \\
 r(v_3^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,1,1,\dots,1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_i^m|S) &= (3,3,\dots,3,4,4,\dots,4,1,1,\dots,1)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(C_m \odot K_{(n,i)})$  berlaku  $r(u, W) \neq r(v, W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya berdasarkan Lema 8 diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Jadi, didapat  $\dim_2(C_m \odot K_{(n,i)}) = (m \times n)$ .

(2) Untuk  $n = 1$  dan  $i > 1$ .

Misal dikonstruksikan  $S = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_i^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2, \dots, v_i^2, v_1^m, v_2^m, v_3^m, \dots, v_i^m\}$ . Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $C_m \odot K_{(n,i)}$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(t_1|S) &= (1,1,1,\dots,1,2,2,2,\dots,2,2,2,2,\dots,2) \\
 r(t_2|S) &= (2,2,2,\dots,2,2,2,1,\dots,1,3,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(t_m|S) &= (2,2,2,\dots,2,3,3,3,\dots,3,1,1,1,\dots,1) \\
 r(u_1^1|S) &= (1,1,1,\dots,1,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 r(u_2^1|S) &= (1,1,1,\dots,1,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^1|S) &= (1,1,1,\dots,1,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 r(u_1^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,1,1,1,\dots,1,4,4,4,\dots,4) \\
 r(u_2^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,1,1,1,\dots,1,4,4,4,\dots,4) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,1,1,1,\dots,1,4,4,4,\dots,4) \\
 r(u_1^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,1,1,1,\dots,1) \\
 r(u_2^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,1,1,1,\dots,1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,1,1,1,\dots,1) \\
 r(v_1^1|S) &= (0,2,2,\dots,2,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 r(v_2^1|S) &= (2,0,2,\dots,2,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 r(v_3^1|S) &= (2,2,0,\dots,2,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_1^2|S) &= (2,2,2,\dots,0,3,3,3,\dots,3,3,3,3,\dots,3) \\
 r(v_2^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,0,2,2,\dots,2,4,4,4,\dots,4) \\
 r(v_3^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,2,0,2,\dots,2,4,4,4,\dots,4) \\
 r(v_3^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,2,2,0,\dots,2,4,4,4,\dots,4) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_i^2|S) &= (3,3,3,\dots,3,2,2,2,\dots,0,4,4,4,\dots,4) \\
 r(v_1^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,0,2,2,\dots,2) \\
 r(v_2^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,2,0,2,\dots,2) \\
 r(v_3^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,2,2,0,\dots,2) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_i^m|S) &= (3,3,3,\dots,3,4,4,4,\dots,4,2,2,2,\dots,0)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(C_m \odot K_{(n,i)})$  berlaku  $r(u, W) \neq r(v, W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya berdasarkan Lema 8 diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Jadi, didapat  $\dim_2(C_m \odot K_{(n,i)}) = (m \times i)$ .

(3) Untuk  $i \geq 1$  dan  $n \geq 1$ .

Misal dikonstruksikan  $S = \{u_1^1, \dots, u_n^1, u_1^2, \dots, u_n^2, u_1^m, \dots, u_n^m, v_1^1, v_2^1, \dots, v_i^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_i^2, v_1^m, v_2^m, \dots, v_i^m\}$ . Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $C_m \odot K_{(n,i)}$  terhadap  $S$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r(t_1|S) &= (1,\dots,1,2,\dots,2,2,\dots,2,1,1,\dots,1,2,2,\dots,2,2,2,\dots,2) \\
 r(t_2|S) &= (2,\dots,2,1,\dots,1,3,\dots,3,2,2,\dots,2,1,1,\dots,1,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(t_m|S) &= (2,\dots,2,3,\dots,3,1,\dots,1,2,2,\dots,2,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1) \\
 r(u_1^1|S) &= (0,\dots,2,3,\dots,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(u_2^1|S) &= (2,\dots,2,3,\dots,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^1|S) &= (2,\dots,0,3,\dots,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,3,3,\dots,3,3,3,\dots,3) \\
 r(u_1^2|S) &= (3,\dots,3,0,\dots,2,4,\dots,4,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,4,4,\dots,4) \\
 r(u_2^2|S) &= (3,\dots,3,2,\dots,2,4,\dots,4,3,3,\dots,3,1,1,\dots,1,4,4,\dots,4) \\
 &\vdots = \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(u_n^2|S) &= (3, \dots, 3, 2, \dots, 0, 4, \dots, 4, 3, 3, \dots, 3, 1, 1, \dots, 1, 4, 4, \dots, 4) \\
 r(u_1^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 0, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 1, 1, \dots, 1) \\
 r(u_2^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 1, 1, \dots, 1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(u_n^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 2, \dots, 0, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 1, 1, \dots, 1) \\
 r(v_1^1|S) &= (1, \dots, 1, 3, \dots, 3, 3, \dots, 3, 0, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3) \\
 r(v_2^1|S) &= (1, \dots, 1, 3, \dots, 3, 3, \dots, 3, 2, 0, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3) \\
 r(v_3^1|S) &= (1, \dots, 1, 3, \dots, 3, 3, \dots, 3, 2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_1^1|S) &= (1, \dots, 1, 3, \dots, 3, 3, \dots, 3, 2, 2, \dots, 0, 3, 3, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3) \\
 r(v_2^1|S) &= (3, \dots, 3, 1, \dots, 1, 4, \dots, 4, 3, 3, \dots, 3, 0, 2, \dots, 2, 4, 4, \dots, 4) \\
 r(v_2^2|S) &= (3, \dots, 3, 1, \dots, 1, 4, \dots, 4, 3, 3, \dots, 3, 2, 0, \dots, 2, 4, 4, \dots, 4) \\
 r(v_3^2|S) &= (3, \dots, 3, 1, \dots, 1, 4, \dots, 4, 3, 3, \dots, 3, 2, 2, \dots, 2, 4, 4, \dots, 4) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_1^2|S) &= (3, \dots, 3, 1, \dots, 1, 4, \dots, 4, 3, 3, \dots, 3, 2, 2, \dots, 0, 4, 4, \dots, 4) \\
 r(v_1^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 1, \dots, 1, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 0, 2, \dots, 2) \\
 r(v_2^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 1, \dots, 1, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 2, 0, \dots, 2) \\
 r(v_3^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 1, \dots, 1, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 2, 2, \dots, 2) \\
 &\vdots = \vdots \\
 r(v_i^m|S) &= (3, \dots, 3, 4, \dots, 4, 1, \dots, 1, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, 2, 2, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi tersebut, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ , maka untuk setiap  $u, v \in V(C_m \odot K_{(n,i)})$  berlaku  $r(u, W) \neq r(v, W)$ . Dengan demikian diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Selanjutnya berdasarkan Lema 8 diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Jadi, didapat  $\dim_2(C_m \odot K_{(n,i)}) = (m \times (n + i))$ . □

### KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian pada pembahasan diperoleh kesimpulan, dimensi  $k$ -metrik pada graf *musical*  $MG_n$  dengan  $n \geq 3$  yaitu seperti pada Teorema 1, graf *turan*  $T_{(g,j)}$  dengan  $g \geq 2$  dan  $j \geq 2$  yaitu seperti pada Teorema 2, dan graf *cycle corona* graf *complete bipartite*  $(C_m \odot K_{(n,i)})$  dengan  $m \geq 3$ ,  $n \geq 1$  dan  $i \geq 1$  yaitu seperti pada Teorema 3.

Saran bagi pembaca yang tertarik mempelajari topik dimensi  $k$ -metrik lebih dalam adalah dengan menerapkannya pada kelas-kelas graf lain yang belum pernah diteliti sebelumnya atau graf yang diperoleh dengan menggunakan operasi seperti *edge corona*, *join*, *amalgamasi*, *product*, atau *comb*. Mengingat penelitian terhadap dimensi  $k$ -metrik pada suatu kelas graf saat ini masih belum banyak diteliti khususnya untuk nilai  $k \geq 3$ , sehingga peluang untuk meneliti dimensi  $k$ -metrik pada kelas-kelas graf lain masih besar.

### DAFTAR RUJUKAN

- [1] Chartrand, G. 1977. *Introductory Graph Theory*. Western Michigan University. Dover Publications, Inc.
- [2] Chartrand, G., L. Lesniak, and P. Zhang. 2016. *Graphs and Digraphs*. 6<sup>th</sup> ed. CRC Press.
- [3] Estrada-Moreno, A., J. A. Rodriguez-Velazquez, and I.G. Yero. (2015). *The k-Metric Dimension of Corona Product Graph*. *Bull Malays Math Sci*, **39(1)**: 135-136.
- [4] Knuth, D. E. 2008. *The Art of Computer Programming: Introduction to*

- Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*. Addison-Wesley.
- [5] Harary, F. and R. A. Melter. (1976). *On the Metric Dimension of a Graph*, *Ars Combinatoria* 2. 191-195.
- [6] Chartrand, G., L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann. (2000). *Resolvability In Graphs and the Metric Dimension of Graph*. *Discrete Appl. Math.* 105: 99-113.
- [7] Rahmadi, D. 2018. *The k-Metric Dimension of Double Fan and Some Related Graphs*. Thesis Department of Mathematics FMIPA UGM.
- [8] Diestel, R. (2005). *Graph Theory*. 3<sup>rd</sup> ed. Springer-Verlag Heidelberg, **173**: 21-22.
- [9] Gross, J. L. and J. Yellen. 2006. *Graph Theory and Its Applications*. 2<sup>nd</sup> ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 476-477.
- [10] Weisstein, E. W. (1998). *Crc Concise Encyclopedia of Mathematics*. 2<sup>nd</sup> ed. CRC press LLC.
- [11] Frucht, R. and F. Harary. (1970). *On The Corona of Two Graphs*. *Aequationes Mathematicae* 4. 322-325.

## PELABELAN TOTAL SISI *TRIMAGIC* SUPER PADA GRAF *BUTTERFLY*

Faradilia Nur Annisa<sup>1)</sup>, Titin Sri Martini<sup>2)</sup>

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret Surakarta,

Jl. Ir. Sutami no. 36A, Surakarta, Indonesia

Email : [faradiliaannisa90@gmail.com](mailto:faradiliaannisa90@gmail.com)

### Abstrak

Graf  $G(V, E)$  disebut memiliki pelabelan total sisi *trimagic* jika terdapat pemetaan *bijektif*  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian hingga untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$ , nilai  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah konstanta  $k_1$  atau  $k_2$  atau  $k_3$ . Pelabelan total sisi *trimagic* disebut sebuah pelabelan total sisi *trimagic* super dari sebuah graf  $G$  jika titik diberi label himpunan bilangan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ . Graf yang dapat dilabeli menggunakan pelabelan *trimagic* adalah graf sederhana, terhubung, dan planar. Dalam penelitian ini dibuktikan bahwa graf *butterfly* adalah pelabelan total sisi *trimagic* super.

**Kata kunci:** pelabelan, pelabelan total sisi *trimagic* super, pemetaan *bijektif*, graf *butterfly*.

### PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mengalami perkembangan sangat pesat. Salah satu bidang teori graf yang berkembang saat ini adalah pelabelan graf. Menurut Marr dan Wallis [7], pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan elemen suatu graf (himpunan titik, himpunan sisi, atau himpunan titik dan sisi) ke bilangan bulat positif atau non negatif. Ada beberapa jenis pelabelan graf, seperti pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Suatu pelabelan total disebut sebagai pelabelan super jika dan hanya jika setiap titiknya mempunyai label lebih kecil daripada label sisinya. Jumlah semua label yang berhubungan dengan suatu elemen (titik atau sisi) dari suatu graf disebut bobot. Hingga kini pelabelan mengalami perkembangan baik untuk kebutuhan aplikasi maupun teoritis. Dalam perkembangannya banyak kajian yang membahas tentang pelabelan.

Pelabelan *magic* diperkenalkan oleh Sedláček [11]. Kortzing dan Rosa [6] mendefinisikan pelabelan total sisi *magic* dari sebuah graf  $G$  jika terdapat pemetaan *bijektif*  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian hingga untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$ , nilai  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah konstanta *magic*. Pada tahun 1990, Hartsfield dan Ringel [2] memperkenalkan untuk pertama kali tentang pelabelan *antimagic*. Hartsfield dan Ringel [2] mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  disebut *antimagic* jika setiap sisinya dapat dilabeli dengan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Pelabelan total sisi *bimagic* pada graf diperkenalkan oleh J. Baskara Babujee [1] pada tahun 2004, mendefinisikan pelabelan total sisi *bimagic* dari sebuah graf  $G$  jika terdapat pemetaan *bijektif*  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian hingga untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$  nilai dari  $f(u) + f(uv) + f(v)$  ialah  $k_1$  atau  $k_2$ .

Pada tahun 2013, Jayasekaran et al. [3] memperkenalkan pelabelan total sisi *trimagic* pada graf. Graf  $G(V, E)$  disebut memiliki pelabelan total sisi *trimagic* jika terdapat pemetaan *bijektif*  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian hingga untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$ , nilai  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah konstanta  $k_1$

atau  $k_2$  atau  $k_3$ . Pelabelan total sisi *trimagic* disebut sebuah pelabelan total sisi *trimagic* super dari sebuah graf  $G$  jika titik diberi label himpunan bilangan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ .

Pada tahun 2014 Regees dan Jayasekaran [8] membuktikan pelabelan total sisi *trimagic* super pada *disconnected graphs*. Pada tahun 2015 Regees dan Jayasekaran [9] telah membuktikan pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *cycle*  $C_n$  untuk  $n$  ganjil dan graf *gear*. Satu tahun kemudian yaitu pada tahun 2016 Jayasekaran dan Regees [10] membuktikan pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *prism* dan *web*. Pada tahun 2017 Jayasekaran dan Flower [4,5] membuktikan bahwa graf *umbrella*, graf *dumb bell*, graf *circular ladder*, graf *mobius ladder*, graf *book*, dan graf *dragon* mempunyai pelabelan total sisi *trimagic* super.

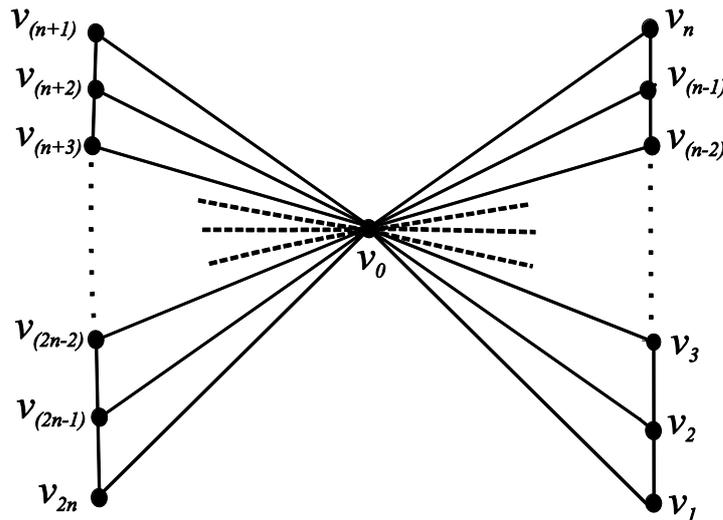
Graf  $G$  dapat dilabeli dengan pelabelan *trimagic* super jika  $G$  adalah suatu graf sederhana, terhubung, dan planar. Selain itu graf tersebut memuat himpunan titik dan sisi sehingga himpunan label yang digunakan pada masing-masing graf dapat ditentukan. Weisstein dan Eric [12] mendefinisikan graf *butterfly*  $BF_n$ , ( $n \geq 2$ ) merupakan graf tak berarah, planar dengan 5 titik dan 6 sisi. Dalam penelitian ini dibuktikan bahwa graf *butterfly* adalah pelabelan total sisi *trimagic* super.

## METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mempelajari referensi berupa buku-buku, jurnal maupun tulisan mengenai teori graf khususnya pada pelabelan *trimagic*. Langkah-langkah menentukan pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *butterfly* yaitu menentukan label titik dengan label  $1, 2, 3, \dots, |V(G)|$  dan label sisi dengan label  $|V(G)| + 1, |V(G)| + 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|$ . Kemudian mengkombinasikan label titik dan sisi dengan memperhatikan teknik pelabelan total sisi *trimagic* super sehingga diperoleh barisan bobot sisi. Setelah itu, menentukan pola umum pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *butterfly*. Selanjutnya menentukan nilai  $k_1, k_2$ , dan  $k_3$  yang diperoleh dari pola umum pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *butterfly*. Lalu menyusun teorema untuk membuktikan kebenaran pola pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *butterfly*. Terakhir, membuat kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut Weisstein dan Eric [12], graf *butterfly* merupakan graf terhubung, sederhana, dan planar dinotasikan dengan  $BF_n$ . Graf *butterfly*  $BF_n$ , ( $n \geq 2$ ) diperoleh dengan cara menyisipkan titik-titik pada setiap sayap dengan asumsi jumlah titik yang disisipkan ke setiap sayap adalah sama sehingga memiliki  $2n + 1$  titik dan  $4n - 2$  sisi. Gambar 1 mengilustrasikan graf umum *butterfly*  $BF_n$ . Berdasarkan Gambar 1, graf  $BF_n$  memiliki titik  $\{v_0\}$  adalah titik pusat, titik  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{(n-1)}, v_n\}$  adalah himpunan titik pada sayap kanan, dan titik  $\{v_{(n+1)}, v_{(n+2)}, v_{(n+3)}, \dots, v_{(2n-1)}, v_{2n}\}$  adalah himpunan titik pada sayap kiri.



Gambar 1. Graf butterfly  $BF_n$

Teorema 1. Graf butterfly  $BF_n$  memuat pelabelan total sisi *trimagic* super untuk setiap bilangan bulat positif  $n \geq 2$ .

Bukti : Misalkan  $V = \{v_i \mid 0 \leq i \leq 2n\}$  adalah himpunan titik dan  $E(BF_n) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1\} \cup \{(v_0, v_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, 2n\}$  adalah himpunan sisi. Banyaknya titik pada graf butterfly  $BF_n$  adalah  $|V(BF_n)| = 2n + 1$  titik dan  $|E(BF_n)| = 4n-2$  sisi. Pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf butterfly  $BF_n$  dengan beberapa ketentuan ketentuan yaitu titik-titik pada graf  $BF_n$  diberi label dengan himpunan  $V(BF_n) = \{v_i \mid i = 0, 1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . Titik  $\{v_0\}$  adalah titik pusat, titik  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{(n-1)}, v_n\}$  adalah himpunan titik pada sayap kanan, dan titik  $\{v_{(n+1)}, v_{(n+2)}, v_{(n+3)}, \dots, v_{(2n-1)}, v_{2n}\}$  adalah himpunan titik pada sayap kiri. Didefinisikan pemetaan *bijektif*  $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n-1\}$  sedemikian sehingga

$$f\{v_i\} = i + 1 \quad \text{untuk, } 0 \leq i \leq 2n$$

$$f\{v_i v_{i+1}\} = \begin{cases} 6n-2i + 1 & \text{untuk, } 1 \leq i \leq n \quad (\text{sayap kanan}) \\ 8n-2i & \text{untuk, } n + 1 \leq i \leq 2n \quad (\text{sayap kiri}) \end{cases}$$

$$f\{v_0 v_i\} = 4n + 2-i \quad \text{untuk, } 1 \leq i \leq 2n$$

Sekarang dibuktikan bahwa graf butterfly  $BF_n$  memiliki tiga konstanta *trimagic* berbeda  $\lambda_1, \lambda_2,$  dan  $\lambda_3$ .

$\lambda_1$  : pelabelan total sisi *trimagic* yang terhubung dengan titik pusat graf butterfly  $BF_n$

$$f(v_0) + f(v_0 v_i) + f(v_i) = 1 + (4n + 2-i) + (i + 1) = 4n + 4 \quad \text{untuk, } 1 \leq i \leq 2n$$

$\lambda_2$  : pelabelan total sisi *trimagic* sayap kanan pada graf butterfly  $BF_n$

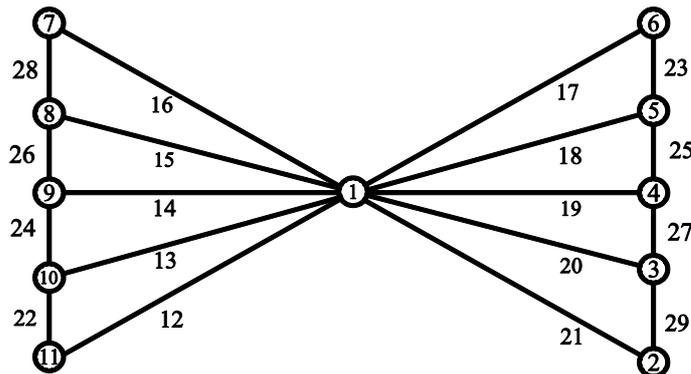
$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = (i + 1) + (6n-2i + 1) + (i + 2) = i + 1 + 6n-2i + 1 + i + 2 = 6n + 4 \quad \text{untuk, } 1 \leq i \leq n$$

$\lambda_3$  : pelabelan total sisi *trimagic* sayap kiri pada graf butterfly  $BF_n$

$$f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i+1}) = (i + 1) + (8n-2i) + (i + 2) = 8n + 3 \quad \text{untuk, } n + 1 \leq i \leq 2n$$

Oleh karena itu untuk setiap sisi  $uv \in E(BF_n)$  nilai  $f(u) + f(uv) + f(v)$  adalah  $\lambda_i$ . Terdapat tiga jumlahan  $\lambda_i$  yang berbeda  $\lambda_1 = 4n + 4$ ,  $\lambda_2 = 6n + 4$  dan  $\lambda_3 = 8n + 3$ . Sehingga terbukti bahwa graf *butterfly*  $BF_n$  memuat pelabelan total sisi *trimagic*. Karena graf *butterfly*  $BF_n$  memiliki  $2n + 1$  titik dan semua titik diberi label dengan bilangan bulat positif terkecil, maka graf *butterfly*  $BF_n$  merupakan pelabelan total sisi *trimagic* super untuk setiap bilangan bulat positif  $n \geq 2$ .

Contoh : Pelabelan total sisi *trimagic* super pada graf *butterfly*  $BF_5$  ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf *butterfly*  $BF_5$  dengan  $\lambda_1 = 24$ ,  $\lambda_2 = 34$  dan  $\lambda_3 = 43$

## PENUTUP

Berdasarkan hasil dan uraian pembahasan diperoleh bahwa graf *butterfly*  $BF_n$  adalah pelabelan total sisi *trimagic* super untuk setiap bilangan bulat positif  $n \geq 2$ . Masih terdapat masalah terbuka *open problems* yaitu menentukan pelabelan total sisi *trimagic* super untuk graf yang lain.

## DAFTAR RUJUKAN

- Babujee. 2004. *On Edge Bimagic Labelling*. *Journal of Combinatorics Information & System Sciences*, 28: 239-244.
- Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Academic Press, San Diego.
- Jayasekaran, M. Reeges dan C. Davidraj. 2013. *Edge trimagic labeling of some graphs*. *Intern. J. Combinatorial Graph Theory and Applications*, 6: 175-186.
- Jayasekaran, C. and J. Little Flower, *On Edge Trimagic Labeling of Umbrella, Dumb bell and Circular Ladder Graphs*, *Annals of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13(1) (2017), pp: 73-87.
- Jayasekaran, C. and J. Little Flower, *Edge Trimagic Labeling of Mobius Ladder, Book, and Dragon Graphs*, *Annals of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13(2) (2017), pp: 151-163.
- Kotzig, A dan A. Rosa. 2013. *Magic Valuation of Finite Graphs*. *Canad. Math Bull*, 451-461.
- Marr, A.M dan W.D. Wallis. 2013. *Magic Graphs*. 2<sup>nd</sup>. Birkhäuser. New York.
- Reeges, M. and C. Jayasekaran, *Edge Trimagic Total Labeling for Disconnected Graphs*, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, Vol. 6 (2014), pp: 44-53.
- Reeges, M. and C. Jayasekaran, *Super Edge Trimagic Total Labeling of Square of a cycle and Gear Graphs*, *Mathematical Sciences International Research Journal*, Vol. 2 (2015), pp: 113-115.

- 
- Regees, M. and C. Jayasekaran, *Edge Trimagic Total Labeling of Generalized Prism and Web Graphs*, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, Vol. 19 (2016), pp: 81-92.
- Sedláček, J. 1964. *Theory of Graphs and Its Applications*. House Czechoslovak Acad. Sci. Prague, 163-164.
- Weistein, Eric W. *Butterfly Graph MathWorld*, *From MathWorld-A Wolfram Web Resource* <http://mathworld.wolfram.com/ButterflyGraph.html>.

## PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TANGGA SEGI EMPAT VARIASI

**Kurniawan Atmadja**

*Program studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Informasi,  
Institut Sains dan Teknologi Nasional Jakarta, Jakarta  
kurniawan\_atmadja@istn.ac.id*

### Abstrak

Graf  $G(V, E)$  terdiri dari himpunan tak kosong simpul  $V$  dan himpunan busur  $E$ . Banyak simpul dinotasikan dengan  $|V|$ , dan banyak busur dinotasikan dengan  $|E|$ . Pelabelan harmonis mensyaratkan banyak simpul tidak melebihi banyak busur. Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif  $f$  dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat modulo  $|E|$  yang membangkitkan fungsi bijektif  $f^*$  dari himpunan busur ke himpunan bilangan bulat modulo  $|E|$  dengan  $f^*(xy) = f(x) + f(y) \pmod{|E|}$  yang menghasilkan label busur yang berbeda. Graf tangga segi-empat variasi diperoleh dari hasil graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$  yang disusun dengan mempertemukan satu simpul pada satu simpul di salah satu sudutnya, sedemikian sehingga menyerupai tangga yang menaik. Telah diketahui bahwa graf tangga segi-tiga variasi adalah graf harmonis. Pada paper ini ditunjukkan bahwa graf tangga segi-empat variasi juga merupakan graf harmonis.

**Kata kunci:** graf tangga segi-empat variasi, graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$ , pelabelan graf, pelabelan harmonis.

### PENDAHULUAN

Misalkan graf  $G = (V, E)$ , dapat disingkat  $G$  adalah graf yang terdiri dari himpunan simpul tak kosong  $V$ , dan himpunan busur  $E$ . Pada graf  $G$ , notasi  $|V|$  menyatakan banyak simpul  $V$  dan notasi  $|E|$  menyatakan banyak busur  $E$ . Graf  $G$  memiliki pelabelan harmonis jika dipenuhi syarat  $|E| \geq |V|$ . Graham R L dan Sloane (1980) memperkenalkan pelabelan harmonis, berawal dari kasus *error-correcting code*. Pelabelan harmonis didefinisikan sebagai suatu pemetaan injektif dari  $V(G)$  ke  $Z_{|E|}$  yang membangkitkan fungsi bijektif  $f^*$  dari himpunan busur ke himpunan bulat modulo  $|E|$ , sedemikian sehingga ketika setiap busur  $xy$  diberi label  $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ , menghasilkan label busur yang berbeda. Graf yang memiliki pelabelan harmonis disebut graf harmonis. (Graham R L dan Sloane, 1980). Beberapa kelas graf dari hasil temuan telah diklasifikasikan sebagai kategori graf harmonis. Hasil kajian temuannya telah dimuat dalam prosiding, antara lain hasil temuan graf tangga segi-tiga (Kurniawan Atmadja dkk, 2014), graf tangga segi-tiga variasi (Kurniawan Atmadja dan Kiki A. Sugeng, 2017), graf tangga segi-tiga ganda (Kurniawan Atmadja dan Kiki A. Sugeng, 2018), dan termuat Jurnal Pelabelan Harmonis pada Gabungan Graf Tangga Segitiga dengan graf tangga segitiga Variasi, (Kurniawan, 2019). Kini berlanjut pada kajian kelas graf yang lain, yaitu kajian graf tangga segi-empat variasi yang akan ditunjukkan sebagai graf harmonis. Untuk informasi lebih lengkap mengenai pelabelan harmonis, dapat dilihat melalui Gallian survey (Gallian, 2019).

### METODE

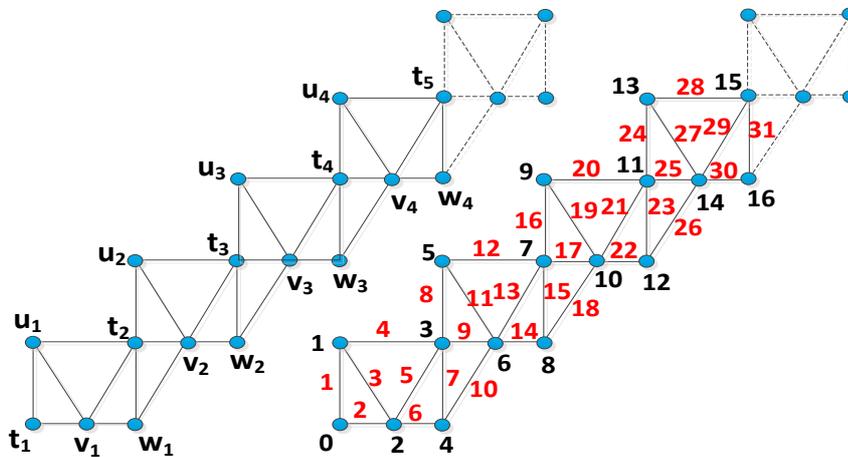
Graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$ , menjadi rujukan guna menindaklanjuti pada penelitian ini. Metode penelitian meliputi langkah langkah sebagai berikut : 1. Melakukan kajian terhadap graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$ . 2. Mempertemukan satu

simpul di salah satu sudut dengan satu simpul di satu sudut lainnya pada graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$ . 3. Memperoleh konstruksi graf terbaru yang konstruksinya menyerupai tangga yang menaik. 4. Melabelkan simpul dan busur pada graf yang diperoleh. 5. Melakukan pembuktian formal sesuai syarat dan konsep pelabelan graf harmonis.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$  (Kurniawan Atmadja, Kiki A Sugeng,2017) adalah graf yang diperoleh melalui penambahan satu simpul  $w_i$  yang diletakkan di antara simpul  $v_i$  dan simpul  $v_{i+1}$  pada graf tangga  $L_n$ . Sehingga ada tambahan 4 jenis busur antara lain :  $u_i w_i \mid 1 \leq i \leq n$  ;  $v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n$  ;  $u_{i+1} w_i \mid 1 \leq i \leq n-1$  ;  $w_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1$ . Ke empat jenis busur ini menggantikan busur  $v_i v_{i+1}$  pada graf tangga asal. Sedangkan graf tangga  $L_n$  adalah graf  $P_n X P_2$  dengan  $V(L_n) = \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  (Kurniawan Atmadja, Kiki A. Sugeng, Teguh Yuniarko 2014).

Berikut ini diberikan konstruksi graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$  dimana  $p = 3n-1$  dan  $q = 6n-5$ . Jika  $|v| = p$  dan  $|E| = q$ , dengan mengambil  $n = 2$ , maka banyak simpul  $p = 5$  yaitu  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ , dan banyak busur  $q = 7$  yaitu  $(u_1 u_2, u_1 v_1, u_1 w_1, v_1 w_1, u_2 w_1, u_2 v_2, w_1 v_2)$  Sesuai langkah – langkah metode pada penelitian ini, dikaji graf tangga segi-tiga variasi  $X_n$ , dan diperoleh temuan graf terbaru, yakni dengan sebutan graf tangga segi-empat variasi dimana  $p = 4n-2$  dan  $q = 8n-8, (n \geq 2)$ . Hasil temuan graf terbaru menyerupai konstruksi tangga yang menaik. . Ilustrasi pelabelan graf tangga segi-empat dapat dilihat pada Gambar 1 sebagai berikut.



Gambar 1: Graf Tangga Segi-empat Variasi dan Pelabelan Harmonisnya.

**Definisi :** Graf tangga segi-empat variasi adalah graf dengan himpunan simpul  $V(G) = \{u_i, t_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, w_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  dan himpunan busur  $E(G) = \{u_i t_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i t_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{t_i v_i, u_i v_i, v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{i+1} v_i, t_{i+1} w_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ .

Berikut dibahas teorema dan pembuktian pada hasil kajian temuan graf tangga segi-empat variasi yang terangkum di bawah ini.

**Teorema.** Graf tangga segi-empat variasi  $G$  untuk  $n \geq 2$  adalah harmonis.

**Bukti.** Misalkan himpunan simpul  $V(G) = \{u_i, t_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, w_i | 1 \leq i \leq n-1\}$  dan himpunan busur  $E(G) = \{u_i t_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i t_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{t_i v_i, u_i v_i, v_i w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{i+1} v_i, t_{i+1} w_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{w_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$ .  
 Definisikan pelabelan simpul  $f: V \rightarrow Z_{|E|}$  sebagai berikut :

$$f(u_i) = 4i-3; 1 \leq i \leq n \in \{1,5,9,13,17,21,25,29,33, \dots, 4n-3\} \subset 1 \pmod 4 \\ = \bar{1} \dots \dots (1)$$

$$f(t_i) = \begin{cases} 0; & i = 1 \\ 4i-5; & i \geq 2 \end{cases} \\ f(t_i) \in \{0\} \cup \{3,7,11,15,19,23,27,31, \dots, 4n-5\} \subset \bar{0} \cup (3 \pmod 4) \\ = \bar{0} \cup \bar{3} \dots \dots \dots (2)$$

$$f(v_i) = 4i-2; 1 \leq i \leq n-1 \\ f(v_i) \in \{2,6,10,14,18,22,26,30,34, \dots, 4n-6\} \subset 2 \pmod 4 \\ = \bar{2} \dots \dots \dots (3)$$

$$f(w_i) = 4i; 1 \leq i \leq n-1 \\ f(w_i) \in \{4,8,12,16,20,24,28,32,36, \dots, 4n-4\} \subset 4 \pmod 4 \\ = \bar{4} \dots \dots \dots (4)$$

Himpunan simpul dari persamaan (1) sampai dengan (4) dapat ditulis dengan mendaftarkan sebagai berikut :  $f(V(G)) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16, \dots, 4n-3\}$ . Anggota label simpul terkecil dari himpunan simpul tersebut terletak pada label simpul  $t_1$  dengan  $(f(t_1) = 0$ . Sedangkan untuk simpul dengan simpul terbesar terletak pada label simpul  $u_n$ , dimana  $f(u_n) = 4n-3$ . Nampak bahwa keanggotaan himpunan label simpul merupakan bilangan bulat dan setiap simpul memiliki label berbeda. Sehingga  $f$  memenuhi sebuah pemetaan dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat  $f: V \rightarrow Z_{|E|}$  dan  $f$  adalah fungsi injektif.

Pelabelan  $f$  akan menginduksi pelabelan busur sebagai berikut :

$$f^*(t_i v_i) = \begin{cases} f(t_1) + f(v_i) = 0 + 4i-2 = 2; & i = 1 \\ f(t_i) + f(v_i) = 4i-5 + 4i-2 = 8i-7; & i \geq 2 \end{cases} \\ \in \{2\} \cup \{9,17,25,33,41,49,57,65,73, \dots, 8n-7\} \\ \subset \{2\} \cup 9 \pmod 8 = \bar{2} \cup \bar{9} \dots \dots \dots (5)$$

$$f^*(t_{i+1} w_i) = f(t_{i+1}) + f(w_i) = 4(i+1)-5 + 4i \\ = 8i-1; i = 1,2,3, \dots \\ \in \{7,15,23,31,39,47,55,63,71, \dots, 8n-1\} \\ \subset 7 \pmod 8 = \bar{7} \dots \dots \dots (6)$$

$$f^*(u_i t_i) = \begin{cases} f(u_i) + f(t_i) = 4i-3 + 0 = 1; & i = 1 \\ f(u_i) + f(t_i) = 4i-3 + 4i-5 = 8i-8; & i \geq 2 \end{cases} \\ \in \{1\} \cup \{8,16,24,32,40,48,56,64,72, \dots, 8n-8\} \\ \subset \{1\} \cup 8 \pmod 8 = \bar{1} \cup \bar{8} \dots \dots \dots (7)$$

$$f^*(w_i v_{i+1}) = f(w_i) + f(v_{i+1}) = 4i + 4(i+1)-2; i = 1,2,3 \dots \\ = 8i + 2; i = 1,2,3 \dots$$

$$\begin{aligned} &\in \{10,18,26,34,42,50,58,66,74, \dots, 8n + 2\} \\ &\subset 10 \pmod 8 = \overline{10} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(u_i v_i) &= f(u_i) + f(v_i) = 4i-3 + 4i-2; i = 1,2,3 \dots \\ &= 8i-5; i = 1,2,3 \dots \\ &\in \{3,11,19,27,35,43,51,59,67,75 \dots, 8n-5\} \\ &\subset 3 \pmod 8 = \overline{3} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

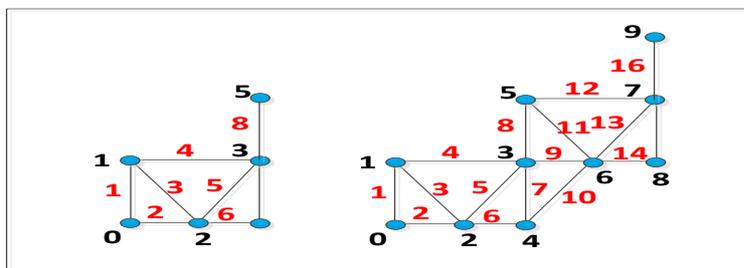
$$\begin{aligned} f^*(u_i t_{i+1}) &= f(u_i) + f(t_{i+1}) = 4i-3 + 4(i + 1)-5 \\ &= 8i-4; i = 1,2,3, \dots \\ &\in \{4,12,20,28,36,44,52,60,68,76, \dots, 8n-4\} \\ &\subset 4 \pmod 8 = \overline{4} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(t_{i+1} v_i) &= f(t_{i+1}) + f(v_i) = 4(i + 1)-5 + 4i-2 \\ &= 8i-3; i = 1,2,3, \dots \\ &\in \{5,13,21,29,37,45,53,61,69,77, \dots, 8n-3\} \\ &\subset 5 \pmod 8 = \overline{5} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(v_i w_i) &= f(v_i) + f(w_i) = 4i-2 + 4i \\ &= 8i-2; i = 1,2,3, \dots \\ &\in \{6,14,22,30,38,46,54,62,70,78, \dots, 8n-2\} \\ &\subset 6 \pmod 8 = \overline{6} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

Dari persamaan (5) sampai dengan (12) dapat ditulis keanggotaan himpunan label busur sebagai berikut :  $f^*(E(G)) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17, \dots, 8n + 2\}$ . Jelas terlihat bahwa setiap busur  $xy$  yang diberi label mengikuti pelabelan busur  $f^*(xy) = (f(x) + f(y)) \pmod{|E|}$  menghasilkan label busur berbeda. Banyak busur  $|E|$ , dan label busur yang dihasilkan adalah  $1,2,3, \dots, |E|$ , menunjukkan pelabelan busur yang bijektif. Maka terbukti graf tangga segi-empat variasi adalah graf harmonis.

Melengkapi hasil dan pembahasan, ditampilkan contoh graf tangga segi-empat variasi dengan ukuran kecil untuk  $n = 2$  maka  $p = 6, q = 8$ , dan jika  $n = 3$  maka  $p = 10, q = 16$ . Tampilan konstruksi graf berikut pelabelannya disajikan pada Gambar 2 berikut ini :



Gambar 2 : Pelabelan Harmonis dari Graf Tangga Segi-empat Variasi,  $n = 2$  dan  $n = 3$

**KESIMPULAN DAN SARAN**

Graf tangga segi-empat variasi adalah perluasan dari graf tangga segi-tiga variasi dan merupakan graf harmonis. Disarankan untuk bisa diperluas lagi agar bisa

ditemukan kembali graf harmonis sebagai tambahan pustaka dalam memperkaya khasanah keilmuan Matematika pada bidang pelabelan graf.

#### UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada ibu Dr. Kiki A Sugeng, M.Si yang membantu penelitian dan penulisan paper ini. Terima kasih juga diucapkan untuk para reviewer yang memberikan saran sehingga paper ini menjadi lebih baik. Semoga para pihak yang terlibat dalam menorehkan amal bhakti ini, senantiasa diberikan keberkahanNya.

#### DAFTAR RUJUKAN

- Kurniawan Atmadja, Kiki A. Sugeng, (2017) *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Variasi*, Prosiding Seminar Nasional Matematika 2017, Departemen Matematika FMIPA UI: 642-647.
- Kurniawan Atmadja, Kiki A Sugeng, (2018) *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Ganda*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIX 2018, Universitas Brawijaya Malang 163-167
- Kurniawan Atamadja, Kiki A Sugeng, Teguh Yuniarko, T (2014), *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII-2014, ITS Surabaya.
- Gallian, J.A (2019) Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronical Journal of Combinatorics*, 16#DS6.
- Graham R L and Sloane N J A (1980) On Additive Bases and Harmonious graph *SIAM J. Alg. Discrete Methods*, Vol 1: 382-404.
- Kurniawan, (2019) Pelabelan Harmonis Gabungan Graf Tangga Segitiga dengan Graf Tangga Segitiga Variasi, *Jurnal Rekayasa Informasi*, Vol.8: 46-51, No.1 ISSN 2252-7354 Fakultas Sains dan Teknologi Informasi, Institut Sains dan Teknologi Nasional Jakarta.

**DIMENSI  $k$ -METRIK PADA GRAF *FIRECRACKER* DAN GRAF *BROOM*****Maria Celine Saputra<sup>1)</sup>, Tri Atmojo Kusmayadi<sup>2)</sup>**<sup>1,2)</sup>*Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret,  
Jl. Ir. Sutami no. 36A, Surakarta, Indonesia  
mariacelline@gmail.com***Abstrak**

Diberikan graf terhubung dan sederhana  $G$  dengan himpunan *vertex*  $V(G)$  dan himpunan *edge*  $E(G)$ . Himpunan  $S \subseteq V(G)$  disebut sebagai pembangkit  $k$ -metrik pada  $G$  jika dan hanya jika untuk setiap dua pasang *vertex* yang berbeda  $u, v \in V(G)$ , terdapat paling sedikit  $k$  *vertex*  $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$  sedemikian sehingga  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  dengan  $d(u, v)$  adalah panjang *path* terpendek dari *vertex*  $u$  ke *vertex*  $v$ . Pembangkit  $k$ -metrik dengan jumlah anggota minimal disebut basis  $k$ -metrik dan banyaknya anggota dari basis  $k$ -metrik disebut dimensi  $k$ -metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan  $\dim_k(G)$ . Pada penelitian ini, akan ditentukan dimensi  $k$ -metrik sebagai perluasan dari konsep dimensi metrik pada graf *firecracker* dan graf *broom* sebagai graf yang belum pernah diteliti dimensi  $k$ -metriknya sebelumnya.

**Kata kunci:** dimensi  $k$ -metrik, graf *firecracker*, graf *broom*

**PENDAHULUAN**

Salah satu cabang ilmu matematika yang berkaitan dengan jaringan titik yang dihubungkan oleh garis adalah Teori Graf. Menurut Chartrand dan Lesniak pada tahun 2016, graf adalah suatu himpunan tak kosong berhingga dari obyek yang disebut titik disertai himpunan sisi (mungkin kosong) yang merupakan pasangan tak berurutan dari titik berbeda, yang kemudian disajikan dalam bentuk garis. Harary pada tahun 1969 juga mengutarakan bahwa titik dan sisi tersebutlah yang merepresentasikan visual suatu graf dimana titik adalah *vertex* dan sisi adalah *edge* yang menghubungkan dua buah *vertex* berbeda.

Pada abad ke-18, seorang ahli matematika Swiss, Leonard Euler, memperkenalkan dasar pengembangan teori graf. Perkembangan penelitian tersebut memunculkan konsep-konsep baru, salah satunya adalah permasalahan dimensi metrik yang pertama diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 dan kemudian Harary dan Melter pada tahun 1976 juga memperkenalkan konsep yang sama.

Dimensi metrik merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda pada  $G$  yang dinotasikan dengan  $\dim(G)$ . Khuller *et al.* pada tahun 1996 menjelaskan aplikasi permasalahan dimensi metrik graf salah satunya pada bidang sains, komputasi, dan robotika. Menurut Chartrand *et al.* pada tahun 2000, misal  $V(G)$  adalah himpunan *vertex* dan  $E(G)$  adalah himpunan *edge* pada graf terhubung  $G$ . Jarak antara  $u$  dan  $v$ , dinotasikan dengan  $d(u, v)$ . Didefinisikan suatu himpunan  $S \subset V(G)$  sebagai himpunan pembeda dari *vertex-vertex* pada graf  $G$  sedemikian sehingga setiap dua *vertex*  $v_1$  dan  $v_2$  di  $G$  dibedakan oleh suatu *vertex* di  $S$  berlaku  $d(v_1, S) \neq d(v_2, S)$ .

Tahun 2015, Estrada-Moreno *et al.* memperkenalkan perluasan dari konsep dimensi metrik yaitu dimensi  $k$ -metrik. Misal  $G$  merupakan graf terhubung dan sederhana, himpunan  $S \subseteq V(G)$  disebut sebagai pembangkit  $k$ -metrik pada  $G$  jika dan hanya jika setiap dua *vertex* berbeda di  $G$  dibedakan oleh paling sedikit  $k$  elemen di  $S$ , dengan kata lain untuk setiap dua *vertex* yang berbeda  $u, v \in V(G)$ , terdapat paling

sedikit  $k$  vertex  $w_1, w_2, \dots, w_k \in S$  sedemikian sehingga  $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  dengan  $d(u, v)$  adalah panjang *path* terpendek dari *vertex*  $u$  ke *vertex*  $v$ . Pembangkit  $k$ -metrik dengan jumlah anggota minimal disebut basis  $k$ -metrik dan banyaknya anggota dari basis  $k$ -metrik disebut dimensi  $k$ -metrik dari graf  $G$  yang dinotasikan  $\dim_k(G)$ . Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk meneliti dimensi  $k$ -metrik pada kelas graf yang belum diteliti sebelumnya dan memiliki kriteria yang dibutuhkan untuk mencari dimensi  $k$ -metrik pada suatu graf yaitu memiliki *twin vertices* pada *vertex* graf tersebut. Kelas graf yang diteliti pada penelitian ini adalah graf *firecracker* dan graf *broom*.

**METODE**

Penelitian ini menggunakan metode berupa kajian pustaka yaitu mengumpulkan referensi berupa buku, jurnal, maupun tulisan yang termuat di situs web sehingga dapat menentukan dimensi  $k$ -metrik pada graf *firecracker* dan graf *broom*. Penelitian diawali dengan mempelajari karakteristik dimensi  $k$ -metrik pada graf *firecracker* dan graf *broom*. Kemudian, menentukan pembangkit  $k$ -metrik, basis  $k$ -metrik, serta menentukan dimensi  $k$ -metrik dan rumus umum dimensi  $k$ -metrik pada graf *firecracker* dan graf *broom*. Penelitian ini diakhiri dengan membangun lema dan/atau teorema serta membuat kesimpulan.

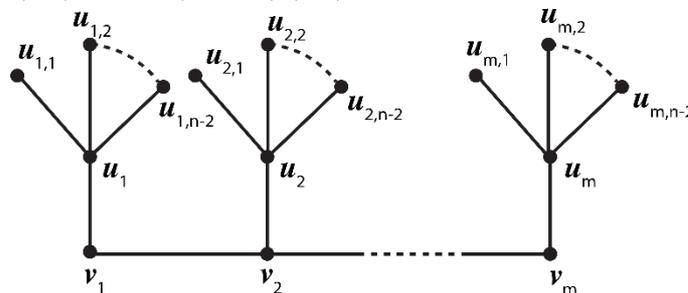
**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Sebelum dipaparkan hasil dan pembahasan, berikut diberikan Lema 1 yang diambil dari Estrada-Moreno *et al.* (2015).

**Lema 1.** Diberikan graf  $G$  dengan order  $n \geq 2$ . Graf  $G$  adalah graf berdimensi 2-metrik jika dan hanya jika  $G$  mempunyai *twin vertices*.

**Dimensi  $k$ -Metrik pada Graf *Firecracker*.** Graf *firecracker*  $F_{m,n}$  adalah sebuah graf yang berasal dari rangkaian  $m$  star  $S_n$  dan  $n$  adalah banyaknya *vertex* pada star  $S_n$ , dengan menghubungkan salah satu daunnya untuk tiap-tiap star (Chen dan Yeh, 1997). Graf *firecracker* terdiri dari himpunan titik  $|V(F_{m,n})| = \{v_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,j} : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\}$  dan himpunan sisi  $|E(F_{m,n})| = \{v_i u_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_i u_{i,j} : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq m-1\}$ .

Misal  $F_{m,n}$  adalah graf *firecracker* yang terdiri dari himpunan *vertex*  $V(F_{m,n}) = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_m, u_{1,a}, u_{1,b}, \dots, u_{1,n-2}, u_{j,a}, u_{j,b}, \dots, u_{j,n-2}\}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  dan  $a, b = 1, 2, \dots, n-2$ .



Gambar 1. Graf *firecracker*  $F_{m,n}$

Berikut adalah cara mencari jarak antar dua *vertex* pada graf *firecracker*.

- Jarak antara  $v_i$  dengan  $v_j = |j-i|$
- Jarak antara  $v_i$  dengan  $u_i = 1$
- Jarak antara  $v_j$  dengan  $u_i = 1 + |j-i|$
- Jarak antara  $v_i$  dengan  $u_{i,a} = 2$

- Jarak antara  $v_j$  dengan  $u_{i,a} = 2 + |j-i|$
- Jarak antara  $u_i$  dengan  $u_j = 2 + |j-i|$
- Jarak antara  $u_i$  dengan  $u_{i,a} = 1$
- Jarak antara  $u_j$  dengan  $u_{i,a} = 3 + |j-i|$
- Jarak antara  $u_{i,a}$  dengan  $u_{i,b} = 2$
- Jarak antara  $u_{i,a}$  dengan  $u_{j,b} = 4 + |j-i|$

dengan syarat  $i \neq j, a, b = 1, 2, \dots, n-2$ .

Berikut diberikan lema dan teorema yang berkaitan dengan dimensi  $k$ -metrik pada graf *firecracker*.

**Lema 2.** Diberikan graf *firecracker*  $F_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$ , maka  $F_{m,n}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $F_{m,n}$  adalah graf *firecracker* dengan order  $m \times n$ . Berdasarkan Gambar 1., diperoleh bahwa  $N_{F_{m,n}}(u_{1,1}) = N_{F_{m,n}}(u_{1,2}) = \dots = N_{F_{m,n}}(u_{1,n-2})$ ,  $N_{F_{m,n}}(u_{2,1}) = N_{F_{m,n}}(u_{2,2}) = \dots = N_{F_{m,n}}(u_{2,n-2})$  dan berlaku untuk  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n-2}$ , sehingga untuk setiap  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n-2}$  merupakan *twin vertices*. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $F_{m,n}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Lema 3.** Diberikan graf *firecracker*  $F_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$ . Jika  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dari  $F_{m,n}$ , maka  $|S| \geq (n-2)m$ .

*Bukti.* Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya setiap  $u, v \in V(F_{m,n})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u|W) \neq r(v|W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (n-2)m$ . Misalkan  $V_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $V_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$ , dan  $V_3 = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n-2}\}$ . Didefinisikan  $S_1 = S \cap V_1$ ,  $S_2 = S \cap V_2$ , dan  $S_3 = S \cap V_3$ . Oleh karena  $|S_1| + |S_2| + |S_3| < (n-2)m$  maka terdapat  $u, v \in V_1, V_2, V_3 \setminus S$  sedemikian sehingga  $r(u|W) = r(v|W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh bahwa  $|S| \geq (n-2)m$ .  $\square$

**Teorema 1.** Diberikan graf *firecracker*  $F_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$ , maka  $\dim_2(F_{m,n}) = (n-2)m$ .

*Bukti.* Menurut Lema 2, diketahui bahwa  $F_{m,n}$  adalah graf berdimensi 2-metrik untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$ , berarti terdapat basis 2-metrik pada  $F_{m,n}$ .

1. Akan ditunjukkan bahwa  $\dim_2(F_{m,n}) = (n-2)m$ . Misalkan himpunan  $S = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n-2}\}$  yaitu  $S = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,n-2}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,n-2}, u_{3,1}, u_{3,2}, \dots, u_{3,n-2}, \dots, u_{m,1}, u_{m,2}, \dots, u_{m,n-2}\}$ . Akan ditunjukkan himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap *vertex* di  $F_{m,n}$  terhadap  $S$ .

$$\begin{aligned}
 r(v_1|S) &= (2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, 4, 4, \dots, 4, \dots, 2 + |j-i|, 2 + |j-i|, \dots, 2 + |j-i|) \\
 r(v_2|S) &= (3, 3, \dots, 3, 2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, \dots, 2 + |j-i|, 2 + |j-i|, \dots, 2 + |j-i|) \\
 &\vdots \\
 r(u_1|S) &= (1, 1, \dots, 1, 4, 4, \dots, 4, 3 + |j-i|, 3 + |j-i|, \dots, 3 + |j-i|) \\
 r(u_2|S) &= (4, 4, \dots, 4, 1, 1, \dots, 1, 3 + |j-i|, 3 + |j-i|, \dots, 3 + |j-i|) \\
 &\vdots \\
 r(u_{1,1}|S) &= (0, 2, \dots, 2, 5, 5, \dots, 5, 4 + |j-i|, 4 + |j-i|, \dots, 4 + |j-i|) \\
 r(u_{1,2}|S) &= (2, 0, \dots, 2, 5, 5, \dots, 5, 4 + |j-i|, 4 + |j-i|, \dots, 4 + |j-i|) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

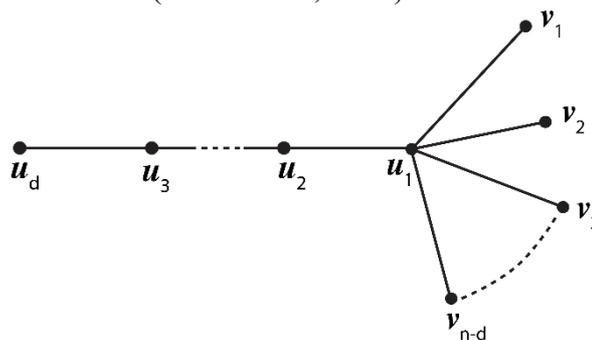
$$\begin{aligned}
 r(v_m|S) &= \begin{cases} 2, & \text{untuk } i = j \\ 2 + |j-i|, & \text{untuk } i \neq j \end{cases} \\
 r(u_m|S) &= \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = j \\ 3 + |j-i|, & \text{untuk } i \neq j \end{cases} \\
 r(u_{i,a}|S) &= \begin{cases} 0, & \text{untuk } a = b, i = j \\ 2, & \text{untuk } a \neq b, i = j \\ 4 + |j-i|, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi yang diperoleh, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  untuk setiap  $u, v \in V(F_{m,n})$  berlaku  $r(u|W) \neq r(v|W)$ . Dengan demikian, diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik.

2. Akan ditunjukkan bahwa  $\dim_2(F_{m,n}) = (n-2)m$ . Misal himpunan  $S = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,n-2}, \dots, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,n-2}, \dots, u_{3,1}, u_{3,2}, \dots, u_{3,n-2}, \dots, u_{m,1}, u_{m,2}, \dots, u_{m,n-2}\}$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| = (n-2)m$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (n-2)m$ , terdapat suatu kemungkinan himpunan  $S$  yaitu  $S \subseteq \{U_{p_i} | 1 \leq i \leq ((n-2)m)-1\}$  dengan  $p_i \in \{1, \dots, (n-2)m\}$ . Diperhatikan bahwa untuk setiap  $u, v \in V(F_{m,n})$  terdapat himpunan  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  yang harus memenuhi  $r(u|W) = r(v|W)$  agar  $S$  menjadi pembangkit 2-metrik. Berdasarkan jarak antar dua *vertex*, diperoleh bahwa terdapat  $u, v \in V(F_{m,n})$  sedemikian sehingga  $r(u|W) \neq r(v|W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi diperoleh bahwa  $|S| \geq (n-2)m$ . Selanjutnya, diperoleh bahwa  $S$  adalah basis 2-metrik. Berdasarkan 1 dan 2, terbukti bahwa  $\dim_2(F_{m,n}) = (n-2)m$ .

□

**Dimensi  $k$ -Metrik pada Graf Broom.** Graf broom  $B_{n,d}$  adalah graf yang terdiri atas graf lintasan  $P$  dengan  $d$  titik dan  $(n-d)$  *pendant* titik yang *adjacent* dengan titik ujung dari graf lintasan  $P$  (Sriram *et al*, 2014).



Gambar 2. Graf broom  $B_{n,d}$

Berikut adalah jarak setiap dua *vertex* berbeda pada graf broom.

Tabel 1. Jarak setiap dua *vertex* berbeda pada graf broom

Jarak	$u_d$	...	$u_3$	$u_2$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	...	$v_{n-d}$
$u_d$	0	...	$d-3$	$d-2$	$d-1$	$d$	$d$	$d$	...	$d$
$\vdots$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$u_3$	$d-3$	...	0	1	2	3	3	3	...	3
$u_2$	$d-2$	...	1	0	1	2	2	2	...	2
$u_1$	$d-1$	...	2	1	0	1	1	1	...	1
$v_1$	$d$	...	3	2	1	0	2	2	...	2

$v_2$	$d$	...	3	2	1	2	0	2	2	2
$v_3$	$d$	...	3	2	1	2	2	0	2	2
$\vdots$	$d$	...	3	2	1	2	2	2	...	2
$v_{n-d}$	$d$	...	3	2	1	2	2	2	2	0

Berikut diberikan lema dan teorema yang berkaitan dengan dimensi  $k$ -metrik pada graf broom.

**Lema 4.** Diberikan graf broom  $B_{n,d}$  dengan  $n \geq 4$  dan  $d \geq 2$ , maka  $B_{n,d}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.

*Bukti.* Diketahui  $B_{n,d}$  adalah graf broom dengan order  $n$ . Berdasarkan Gambar 2., diperoleh bahwa  $N_{B_{n,d}}(v_1) = N_{B_{n,d}}(v_2) = \dots = N_{B_{n,d}}(v_{n-d})$  sehingga  $v_1, v_2, \dots, v_{n-d}$  merupakan twin vertices. Berdasarkan Lema 1 diperoleh bahwa  $B_{n,d}$  adalah graf berdimensi 2-metrik.  $\square$

**Lema 5.** Diberikan graf broom  $B_{n,d}$  dengan  $n \geq 4$  dan  $d \geq 2$ . Jika  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dari  $B_{n,d}$ , maka  $|S| \geq (n-d)$ .

*Bukti.* Diketahui  $S$  adalah pembangkit 2-metrik, artinya untuk setiap  $u, v \in V(B_{n,d})$  terdapat  $W \subset S$  sedemikian sehingga  $r(u|W) \neq r(v|W)$  dengan  $|W| = 2$ . Andaikan  $S$  adalah pembangkit 2-metrik dengan  $|S| < (n-d)$ . Misalkan  $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$  dan  $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-d}\}$ . Didefinisikan  $S_1 = S \cap V_1$  dan  $S_2 = S \cap V_2$ , oleh karena  $|S_1| + |S_2| < (n-d)$  maka terdapat  $u, v \in V_1, V_2 \setminus S$  sedemikian sehingga  $r(u|W) = r(v|W)$  untuk setiap  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$ . Kontradiksi dengan pernyataan bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik. Pengandaian salah dan harus diingkar, dengan demikian  $S$  bukan pembangkit 2-metrik. Jadi, diperoleh  $|S| \geq (n-d)$ .  $\square$

**Teorema 2.** Diberikan graf broom  $B_{n,d}$  dengan  $n \geq 4$  dan  $d \geq 2$ , maka  $\dim_2(B_{n,d}) = (n-d)$ .

*Bukti.* Menurut Lema 4, diketahui bahwa  $B_{n,d}$  adalah graf berdimensi 2-metrik untuk  $n \geq 4$  dan  $d \geq 2$ , berarti terdapat basis 2-metrik pada  $B_{n,d}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $\dim_2(B_{n,d}) = (n-d)$ . Misalkan himpunan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-d}\}$ . Akan ditunjukkan himpunan  $S$  adalah basis 2-metrik. Berikut diberikan representasi setiap vertex di  $B_{n,d}$  terhadap  $S$ .

$$\begin{aligned}
 r(u_d|S) &= (d, d, d, d, \dots, d, d) \\
 &\vdots \\
 r(u_3|S) &= (3, 3, 3, 3, \dots, 3, 3) \\
 r(u_2|S) &= (2, 2, 2, 2, \dots, 2, 2) \\
 r(u_1|S) &= (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1) \\
 r(v_1|S) &= (0, 2, 2, 2, \dots, 2, 2) \\
 r(v_2|S) &= (2, 0, 2, 2, \dots, 2, 2) \\
 r(v_3|S) &= (2, 2, 0, 2, \dots, 2, 2) \\
 &\vdots \\
 r(v_{n-d}|S) &= (2, 2, 2, 2, \dots, 2, 0)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi yang diperoleh, jika diambil suatu  $W \subset S$  dengan  $|W| = 2$  untuk setiap  $u, v \in V(B_{n,d})$  berlaku  $r(u|W) \neq r(v|W)$ . Dengan demikian, diperoleh bahwa  $S$  adalah pembangkit 2-metrik.  $\square$

**KESIMPULAN DAN SARAN**

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa dimensi  $k$ -metrik pada graf *firecracker* dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 4$  adalah  $\dim_2(F_{m,n}) = (n-2)m$  dan dimensi  $k$ -metrik pada graf *broom* dengan  $n \geq 4$  dan  $d \geq 2$  adalah  $\dim_2(B_{n,d}) = (n-d)$ . Penelitian ini membahas tentang dimensi  $k$ -metrik pada graf *firecracker* dan graf *broom*. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik dimensi  $k$ -metrik, dapat mengembangkan penelitian ini dengan menerapkannya pada kelas-kelas graf yang belum pernah diteliti atau graf yang diperoleh dengan menggunakan operasi lain, seperti *join*, *korona*, dan *cartesian product*. Pada penelitian selanjutnya, dapat juga diteliti graf-graf yang belum ditentukan nilai dimensi  $k$ -metriknya. Kesempatan untuk meneliti dimensi  $k$ -metrik pada kelas-kelas graf lain masih besar, mengingat dimensi  $k$ -metrik adalah materi baru yang sedang dikembangkan sehingga sampai saat ini masih banyak kelas graf yang belum diteliti.

#### DAFTAR RUJUKAN

- Chartrand, G., L. Lesniak, dan P. Zhang. 2016. *Graph and Digraphs, sixth ed.* CRC Press.
- Chartrand, G., L. Eroh, M. Johnson, dan O. Oellermann. 2000. *Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of Graph.* Discrete Applied Mathematics, 99-113.
- Chen, W., dan Y. Yeh. 1997. *Operations of Interfaced Trees and Graceful Trees.* Southeast Asian Bull, 337-348.
- Estrada-Moreno, A., J.A. Rodriguez-Velazques, dan I.G. Yero. 2015. *The  $k$ -metric Dimension of a Graph.* Applied Mathematics and Information Sciences, 2829-2840.
- Estrada-Moreno, A., J.A. Rodriguez-Velazques, dan I.G. Yero. 2015. *The  $k$ -metric Dimension of a Corona Product Graph.* Bull Malays Math Sci, 135-136.
- Harary, F. 1969. *Graph Theory.* Wesley Publishing Company Inc.
- Harary, F., dan R. A. Melter. 1976. *The Metric Dimension of a Graph.* Ars Combinatoria 2, 191-195.
- Khuller, S., B. Raghavachari, dan A. Rosenfeld. 1996. *Landmarks in Graphs.* Discrete Applied Mathematics, 217-229.
- Slater, P. J. 1975. *Leave of Trees.* Congressus Numerantium, 549-559.
- Sriram, S., D. Rangayakulu, V. Ibrahim, dan K. G. Subramanian. 2014. *On Eccentric Graphs of Broom Graphs.* Annals of Pure and Applied Mathematics, 146-152.
- Yi, W., dan B. Zhu. 2010. *On The Unimodality of Independence Polynomials of Some Graphs.* Dalian University of Technology.

## ANALISA PERBANDINGAN INFERENSI *FUZZY* TSUKAMOTO DAN MAMDANI DALAM MEMPREDIKSI JUMLAH PENDAFTAR MAHASISWA BARU PRODI TADRIS MATEMATIKA IAIN KEDIRI

<sup>1)</sup>Nalsa Cintya Resti, <sup>2)</sup> Umi Mahdiyah

<sup>1)</sup>IAIN Kediri, <sup>2)</sup>Universitas Nusantara PGRI Kediri

[nalsacintya@iainkediri.ac.id](mailto:nalsacintya@iainkediri.ac.id)

### Abstrak

Institut Agama Islam Negeri (IAIN) Kediri merupakan salah satu perguruan tinggi islam di Jawa Timur yang memiliki potensi besar dalam menyerap mahasiswa baru, sedangkan Program Studi Tadris Matematika merupakan salah satu program studi yang dimiliki IAIN Kediri. Sejak awal dibuka pada tahun ajaran 2017 – 2018, prodi Tadris Matematika mengalami kenaikan dan penurunan dalam hal registrasi ulang mahasiswa baru. Penelitian ini merupakan penelitian aplikatif yang didalamnya dilakukan analisa perbandingan inferensi *fuzzy* Tsukamoto dan Mamdani dalam memprediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru dilihat dari jumlah mahasiswa yang lulus dan registrasi ulang. Hasil penelitian yang telah dihitung menunjukkan bahwa Inferensi *Fuzzy* metode Tsukamoto memiliki eror yang lebih kecil sebesar 20,9% dibanding Inferensi *Fuzzy* metode mamdani yang memiliki eror sebesar 35,5% pada prediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru. Dengan mengacu pada penelitian ini diharapkan institusi dapat memprediksi jumlah mahasiswa baru yang akan mendaftar pada program studi yang ada di IAIN Kediri menggunakan Inferensi *Fuzzy* metode Tsukamoto.

**Kata kunci:** perbandingan, inferensi *fuzzy*, Tsukamoto, Mamdani, mahasiswa baru

### PENDAHULUAN

Institusi pendidikan tinggi setiap tahunnya dapat dipastikan selalu menerima mahasiswa baru. Jumlah pendaftar setiap tahunnya mengalami fluktuasi dan sulit untuk diprediksi. Sejak dibuka pada tahun ajaran 2017 – 2018, Program Studi Tadris Matematika IAIN Kediri juga mengalami hal yang sama. Selalu mengalami perubahan jumlah pendaftar dengan tahun-tahun yang lain. Pada perkembangannya IAIN Kediri memiliki beberapa jalur penerimaan mahasiswa baru, antara lain SPMB-PTAIN, SPAN-PTKIN, UM-PTKIN, SNMPTN UNDANGAN serta jalur mandiri. Semakin banyak jalur penerimaan diharapkan semakin banyak kesempatan calon mahasiswa baru untuk lolos ujian masuk.

Inferensi *fuzzy* dapat digunakan untuk memprediksi suatu permasalahan yang menggambarkan ketidakjelasan. Hal ini sangat cocok dengan permasalahan yang diteliti yaitu memprediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru program studi Tadris Matematika IAIN Kediri. Logika *fuzzy* memiliki 3 metode inferensi yaitu metode Tsukamoto, metode Mamdani, dan metode Sugeno. Ketiga metode tersebut memiliki algoritma, mesin inferensi dan defuzifikasi yang berbeda.

Terdapat beberapa aspek yang diperhatikan dalam memprediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru di program studi Tadris Matematika IAIN Kediri, yaitu jumlah mahasiswa yang lulus dan jumlah mahasiswa yang registrasi. Data tersebut dapat diambil di bagian bidang akademik Fakultas Tarbiyah IAIN Kediri.

Nalsa Cintya Resti telah melakukan penelitian sebelumnya dengan judul “Penerapan Metode Tsukamoto untuk menentukan Jumlah Produksi Obat Ikan di UD. Indo Multi Fish Tulungagung” (Resti, 2019). Dari penelitian tersebut perusahaan dapat memperkirakan jumlah obat ikan yang akan diproduksi sehingga dapat meningkatkan keuntungan perusahaan. Rahakbauw, dkk telah melakukan penelitian dengan judul “Penerapan Metode Fuzzy mamdani untuk Memprediksi Jumlah Produksi Karet”. Dari penelitian tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa penerapan inferensi fuzzy Mamdani efektif diterapkan dalam aplikasi software Matlab untuk membantu perusahaan dalam memprediksi penentuan jumlah produksi karet. (Rahakbauw, Rianekuay, & Lesnussa, 2019). Pada tahun 2017, Supina Batubara melakukan penelitian dengan judul “ Analisis Perbandingan Metode Fuzzy Mamdani dan Fuzzy Sugeno untuk Penentuan Kualitas Cor Beton Instan”. Dari penelitian tersebut diambil kesimpulan yaitu dengan menggunakan metode mamdani dan sugeno dapat digunakan untuk menentukan kualitas cor beton tetapi yang lebih direkomendasikan adalah metode Mamdani karena metode Mamdani menghasilkan solusi yang mendekati hasil sebenarnya dibanding metode Sugeno. (Batubara, 2017)

Pada penelitian ini penulis menerapkan dan membandingkan metode inferensi *fuzzy* Tsukamoto dan Mamdani dalam memprediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru yang memilih Prodi Tadris Matematika. Hasil perbandingan akan menunjukkan metode mana yang lebih tepat dan akurat untuk kasus prediksi jumlah pendaftar.

## METODE

### a. Logika Fuzzy

Logika fuzzy merupakan salah satu metode penalaran yang banyak dipakai untuk menyelesaikan banyak permasalahan, seperti sistem pendukung keputusan, sistem pengendalian maupun sistem klasifikasi. Metode ini diajukan oleh Lofti A. Zadeh pada tahun 1965. Meskipun diperkenalkan di Amerika, logika fuzzy justru berkembang di Jepang, sebelum kemudian kembali lagi ke Amerika (Hindriyanto Dwi purnomo, 2014).

Derajat keanggotaan pada logika *fuzzy* memiliki peranan yang sangat penting karena digunakan sebagai penentu keberadaan elemen dalam suatu himpunan. Derajat keanggotaan ini memiliki rentang 0 hingga 1. Bernilai 1 memiliki arti bahwa suatu item menjadi anggota dalam suatu himpunan, sedangkan bernilai 0 memiliki arti bahwa suatu item tidak menjadi anggota dalam suatu himpunan (Kusumadewi & Purnomo, 2010). Logika *fuzzy* digunakan untuk menerjemahkan suatu besaran yang diekspresikan menggunakan bahasa, misalkan besaran usia yang diekspresikan dengan muda, parobaya, dan tua. Dalam logika *fuzzy* sesuatu dapat dikatakan sebagian benar dan sebagian salah dalam waktu yang sama.

### b. Inferensi Fuzzy Metode Tsukamoto

Pada metode Tsukamoto, setiap kongruen pada aturan yang berbentuk IF-Then harus direpresentasikan terlebih dulu dengan suatu himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan yang monoton, sehingga output hasil inferensi dari tiap aturan diberikan secara tegas (crisp) berdasarkan  $\alpha$  - predikat. Saat proses evaluasi, metode *fuzzy* Tsukamoto menggunakan fungsi implikasi MIN/DOT (Kusumadewi & Purnomo, 2010). Hasil akhir atau defuzifikasi dapat diperoleh dengan menggunakan rata-rata terbobot dengan rumus berikut:

$$Z = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

### c. Inferensi Fuzzy Metode Mamdani

Metode Mamdani dapat pula dikatakan sebagai Metode Max-Min. Metode ini menggunakan 4 tahapan dalam perhitungan, yaitu:

- Pembentukan himpunan *fuzzy*
- Aplikasi fungsi implekasi (aturan)
- Komposisi aturan

d. Penegasan (defuzifikasi)

Saat melakukan evaluasi aturan dalam inferensi, metode ini menggunakan fungsi MIN sedangkan komposisi antar-rule menggunakan fungsi MAX untuk menghasilkan himpunan *fuzzy* baru (Kusumadewi & Purnomo, 2010). Hasil akhir atau defuzifikasi dapat diperoleh dengan menggunakan metode Centroid dengan rumus berikut:

$$Z = \frac{\int \mu(z) \cdot z \, dz}{\int \mu(z) \, dz}$$

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah calon mahasiswa yang lulus seleksi dan yang registrasi di program studi Tadris Matematika IAIN Kediri mulai tahun ajaran 2017 – 2018 hingga 2019 – 2020.

Tabel 1. Data mahasiswa baru prodi Tadris Matematikatahun ajaran 2017-2018 hingga 2019-2020

No.	Tahun	Mahasiswa Lulus	Mahasiswa Registrasi
1.	2017 – 2018	55	50
2.	2018 – 2019	154	114
3.	2019 - 2020	116	93

Fungsi aturan dengan menggunakan metode MIN dapat dilihat pada tabel 2.

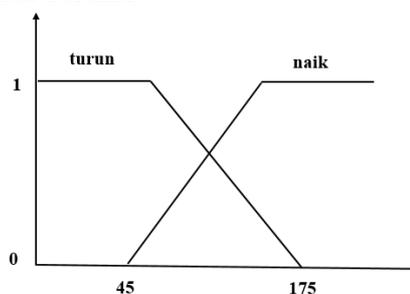
Tabel 2. Aturan / rules

Kode	Aturan
[R1]	IF jumlah diterima berkurang AND jumlah mahasiswa registrasi banyak THEN jumlah mahasiswa pendaftar menurun
[R2]	IF jumlah diterima berkurang AND jumlah mahasiswa registrasi sedikit THEN jumlah mahasiswa pendaftar menurun
[R3]	IF jumlah diterima bertambah AND jumlah mahasiswa registrasi banyak THEN jumlah mahasiswa pendaftar meningkat
[R4]	IF jumlah diterima bertambah AND jumlah mahasiswa registrasi sedikit THEN jumlah mahasiswa pendaftar meningkat

**Inferensi dan Defuzifikasi menggunakan Metode Tsukamoto**

Pada metode Tsukamoto, komposisi menggunakan fungsi inferensi MIN yaitu dengan mengambil nilai paling minimum dari variabel input dan digunakan sebagai outputnya. Langkah:

- a. Menghitung nilai keanggotaan himpunan masing-masing variabel
  - a. Jumlah mahasiswa yang lulus seleksi



Gambar 1. Fungsi keanggotaan variabel jumlah mahasiswa diterima

$$ML \text{ (turun)} [x] : \begin{cases} 1 & x \leq 45 \\ \frac{175-x}{175-45} & 45 \leq x \leq 175 \\ 0 & x \geq 175 \end{cases} \quad ML \text{ (naik)} [x] : \begin{cases} 0 & x \leq 45 \\ \frac{x-45}{175-45} & 45 \leq x \leq 175 \\ 1 & x \geq 175 \end{cases}$$

Untuk tahun 2017 – 2018

- ML turun (55) =  $\frac{175-55}{175-45} = 0.92$
- ML naik (55) =  $\frac{55-45}{130} = 0.076$

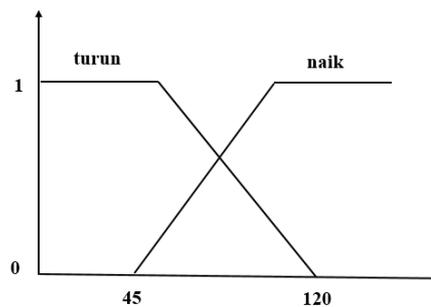
Untuk tahun 2018 - 2019

- ML turun (154) =  $\frac{175-154}{175-45} = 0.16$
- ML naik (154) =  $\frac{154-45}{175-45} = 0.83$

Untuk tahun 2019 - 2020

- ML turun (116) =  $\frac{175-116}{175-45} = 0.45$
- ML naik (116) =  $\frac{55-45}{130} = 0.54$

b. Jumlah mahasiswa registrasi



Gambar 2. Fungsi Keanggotaan variabel jumlah mahasiswa registrasi

$$MR \text{ (turun)} [x] : \begin{cases} 1 & x \leq 45 \\ \frac{120-x}{120-45} & 45 \leq x \leq 120 \\ 0 & x \geq 120 \end{cases} \quad MR \text{ (naik)} [x] : \begin{cases} 0 & x \leq 45 \\ \frac{x-45}{120-45} & 45 \leq x \leq 120 \\ 1 & x \geq 120 \end{cases}$$

Untuk tahun 2017 – 2018

- MR turun (50) =  $\frac{120-50}{75} = 0.93$
- MR naik (50) =  $\frac{50-45}{75} = 0.06$

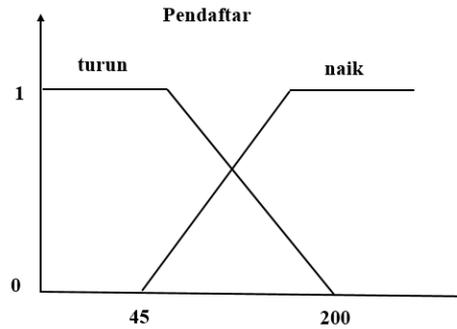
Untuk tahun 2018 - 2019

- MR turun (114) =  $\frac{120-114}{75} = 0.08$
- MR naik (114) =  $\frac{114-45}{75} = 0.92$

Untuk tahun 2019 - 2020

- MR turun (93) =  $\frac{120-93}{75} = 0.36$
- MR naik (93) =  $\frac{93-45}{75} = 0.64$

b. Mencari nilai Z menggunakan fungsi min pada fungsi implikasi



Gambar 3. Fungsi Keanggotaan variabel jumlah pendaftar

$$\text{Pendaftar (naik) } [z] : \frac{z-45}{600-45} \qquad \text{Pendaftar (turun) } [x] : \frac{600-z}{600-45}$$

Untuk tahun 2017 – 2018

- [R1] MIN (diterima berkurang  $\cap$  registrasi banyak) THEN pendaftar turun  
MIN (0.92 ; 0.06) = 0.06  $z_1 = 567$
- [R2] MIN (diterima berkurang  $\cap$  registrasi sedikit) THEN pendaftar turun  
MIN (0.92 ; 0.93) = 0.92  $z_2 = 89$
- [R3] MIN (diterima bertambah  $\cap$  registrasi banyak) THEN pendaftar naik  
MIN (0.076 ; 0.06) = 0.06  $z_3 = 78$
- [R4] MIN (diterima bertambah  $\cap$  registrasi sedikit) THEN pendaftar naik  
MIN (0.076; 0.93)  $z_4 = 87$

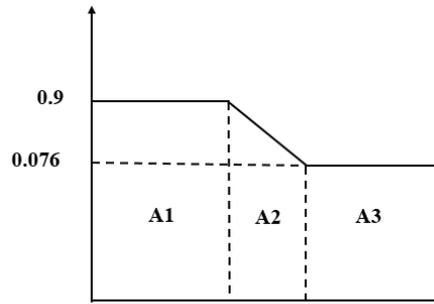
c. Defuzifikasi (tahun 2017 – 2018)

Tahap defuzifikasi merupakan tahap mengubah dari *fuzzy* output menjadi *crisp* output. Pada tahap ini digunakan metode rata-rata untuk mendapatkan nilai *crisp*.

$$\begin{aligned} z &= \frac{\alpha \text{ pred}_1 * z_1 + \alpha \text{ pred}_2 * z_2 + \alpha \text{ pred}_3 * z_3 + \alpha \text{ pred}_4 * z_4}{\alpha \text{ pred}_1 + \alpha \text{ pred}_2 + \alpha \text{ pred}_3 + \alpha \text{ pred}_4} \\ &= \frac{(0.06*567) + (0.92*89) + (0.06*78) + (0.076*87)}{0.06 + 0.92 + 0.06 + 0.076} \\ &= 115 \end{aligned}$$

**Inferensi dan Defuzifikasi menggunakan Metode Mamdani**

- a. Menentukan min dan max fungsi keanggotaan aturan *fuzzy*
  - Untuk tahun 2017 – 2018 Untuk tahun 2019 – 2020
  - Nilai min: 0.06 Nilai min: 0.36
  - Nilai max: 0.92 Nilai max: 0.54
  - Untuk tahun 2018 – 2019
  - Nilai min: 0.08
  - Nilai max: 0.83
- b. Menentukan batas atas dan batas bawah



Gambar 4. Komposisi aturan max

Batas atas:  $\frac{z_1-45}{555} = 0.92$   $z_1 = 555.6$

Batas bawah:  $\frac{z_2-45}{555} = 0.076$   $z_2 = 87$

Dengan menggunakan Metode Centroid:

$$z^* = \frac{\int_z z\mu(z)dz}{\int_z \pi(z)dz}$$

$$M_1 = \int_0^{87} (0.92)zdz = 3481.7$$

$$M_2 = \int_{87}^{555} \frac{z-45}{555} z dz = 90099$$

$$M_3 = \int_{555}^{600} 0.076 z dz = 1976$$

Sehingga didapat nilai A:

- $A_1 = 0.92 \cdot 555 = 510.6$
- $A_2 = 231$
- $A_3 = 0.076 \cdot 87 = 6.612$

c. Defuzifikasi

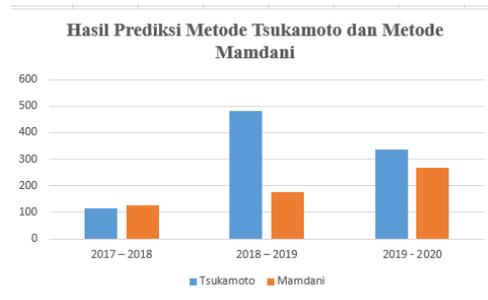
$$z = \frac{3481.7 + 90099 + 1976}{510.6 + 231 + 6.612} = \frac{95556}{748.2} = 127.7 \approx 128$$

### Hasil prediksi metode Tsukamoto dan Mamdani

Tabel 3. Hasil prediksi metode Tsukamoto dan Mamdani

Tahun		Tsukamoto	Mamdani
2017	-	115	128
2018			
2018	-	481	178
2019			
2019 - 2020		337	269

Apabila direpresentasikan ke dalam bentuk grafik menjadi:



Gambar 5. Hasil Prediksi Metode Tsukamoto dan Metode Mamdani

### Uji hasil perbandingan prediksi jumlah pendaftar

Untuk melakukan uji hasil dapat dilakukan dengan perhitungan dibawah ini:

$$AFER = \frac{\sum \frac{A_i - F_i}{A_i}}{n} \times 100\%$$

Dengan  $A_i$  adalah nilai aktual pada data ke  $i$  dan  $F_i$  adalah nilai hasil peramalan untuk data ke- $i$  dengan  $n$  adalah banyaknya data.

Tabel 4. Data Hasil Uji Prediksi Metode Tsukamoto

Tahun	Pendaftar Real (A)	Hasil Prediksi (F)	(A-F)	$\frac{(A-F)}{A}$
2017-2018	101	115	-14	-0.138
2018-2019	653	481	172	0.26
2019-2020	684	337	347	0.507
Jumlah				0.629
AFER				0.209 = 20.9%

Tabel 5. Data Hasil Uji Prediksi Metode Mamdani

Tahun	Pendaftar Real (A)	Hasil Prediksi (F)	(A-F)	$\frac{(A-F)}{A}$
2017-2018	101	128	-27	-0.267
2018-2019	653	178	475	0.727
2019-2020	684	269	415	0.606
Jumlah				1.066
AFER				0.355 = 35.5%

Dari perhitungan AFER didapatkan nilai AFER dengan metode Tsukamoto sebesar 20.9% sedangkan AFER dengan metode Mamdani sebesar 35.5%. Hal ini menunjukkan bahwa metode Mamdani memiliki eror yang lebih besar jika dibandingkan dengan metode Tsukamoto.

## KESIMPULAN DAN SARAN

Dari perhitungan yang telah dilakukan didapatkan hasil bahwa prediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru Prodi Tadris Matematika menggunakan metode Tsukamoto menghasilkan eror lebih sedikit yaitu 20.9% jika dibandingkan dengan menggunakan metode Mamdani yang menghasilkan eror sebesar 35.5%. Dari kedua metode tersebut dapat disimpulkan bahwa metode Tsukamoto lebih tepat digunakan dalam hal prediksi jumlah pendaftar mahasiswa baru Program Studi Tadris Matematika IAIN Kediri.

Berdasarkan penelitian ini, saran yang dapat diberikan adalah perlu adanya kajian mengenai algoritma inferensi *fuzzy* yang dipakai sehingga dapat lebih bermanfaat lebih luas. Selain itu perlu dikembangkan aplikasi pendukung sehingga lebih mudah dalam memperkirakan jumlah pendaftar mahasiswa baru sehingga dapat dimanfaatkan ke lingkup yang lebih luas lagi.

## DAFTAR RUJUKAN

- Batubara, S. (2017). Analisis Perbandingan Metode Fuzzy Mamdani dan Fuzzy Sugeno untuk Penentuan Kualitas Cor Beton Instan. *IT Journal Research and Development*, 1-11.
- Hindriyanto Dwi purnomo, P. (2014). *Logika Fuzzy*. Yogyakarta: Leutikaprio.
- Kusumadewi, S., & Purnomo, H. (2010). *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Rahakbauw, D. L., Rianekuay, F. J., & Lesnussa, Y. A. (2019). Penerapan Metode Fuzzy mamdani untuk Memprediksi Jumlah Produksi Karet (Studi Kasus: Data Persediaan dan Permintaan Produksi karet pada PTP Nusantara XIV (Persero) Kebun Awaya, Teluk Elpaputih, Maluku-Indonesia). *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 119-127.
- Resti, N. C. (2019). Penerapan Metode Tsukamoto untuk Menentukan Jumlah Produksi Obat Ikan di UD. Indo Multi Fish Tulungagung. *Factor-M*, 106-113.

**KEKUATAN SISI REFLEKSIF PADA GRAF TANGGA****Novely Elfiria Lubis<sup>1)</sup>, Diari Indriati<sup>2)</sup>**

<sup>1,2)</sup> Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami no. 36A,  
Surakarta, Indonesia  
[novelyelfirial@gmail.com](mailto:novelyelfirial@gmail.com)

**Abstrak**

Misalkan  $G$  merupakan graf sederhana dan terhubung dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi (*edge irregular reflexive  $k$ -labeling*) pada graf  $G$  adalah pemberian label untuk sisi dengan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  dan bilangan genap dari  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  untuk label titik, dengan  $k = \max\{k_e, 2k_v\}$  sehingga bobot pada setiap sisi dari graf  $G$  berbeda. Bobot sisi didefinisikan sebagai jumlah label sisi dengan semua label titik yang *incident* dengan sisi tersebut. Bobot sisi  $xy$  terhadap pelabelan  $f$  dari graf  $G$  dinotasikan  $wt(xy)$  dengan  $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ . Nilai minimum  $k$  pada graf  $G$  yang dapat dilabeli dengan pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi disebut dengan kekuatan sisi refleksif yang dinotasikan dengan  $res(G)$ .  $res(G)$  diperoleh dengan menghitung batas bawah dari graf  $L_n$  kemudian melakukan pelabelan untuk menentukan bobot masing-masing sisi dari graf tangga  $L_n$ . Pada makalah ini akan ditentukan kekuatan sisi refleksif pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n > 1$  yang belum pernah diteliti sebelumnya dan dapat digunakan untuk meneliti topik lain seperti kekuatan titik refleksif graf tangga  $L_n$ .

**Kata kunci:** pelabelan refleksif tak teratur sisi, kekuatan sisi refleksif, graf tangga

**PENDAHULUAN**

Suatu graf  $G$  terdiri dari himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan. Wallis (2001) mendefinisikan pelabelan suatu graf adalah pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non negatif. Jenis pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan titik dan sisi (pelabelan total). Kemudian, seiring berjalannya waktu, terdapat perkembangan beberapa jenis pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total tak teratur.

Menurut Bača dkk. (2007), pelabelan total tak teratur terbagi menjadi pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik. Tahun 2017, Ryan dkk. (Bača dkk., 2019), memperkenalkan sebuah konsep baru dari pelabelan total tak teratur yaitu pelabelan refleksif tak teratur titik dan pelabelan refleksif tak teratur sisi pada suatu graf. Pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi (*edge irregular reflexive  $k$ -labeling*) pada graf  $G$  adalah pemberian label untuk sisi dengan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  dan bilangan genap  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  untuk label titik, sehingga bobot setiap sisi dari graf  $G$  berbeda. Bobot sisi  $e$  dari graf  $G$  didefinisikan sebagai jumlah label sisi dengan semua label titik yang *incident* dengan sisi tersebut, dinotasikan  $wt(xy)$  dengan  $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ . Ryan dkk. (Bača dkk., 2019) juga mendefinisikan bahwa kekuatan sisi refleksif dari graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $res(G)$  adalah nilai minimum  $k$  dari label terbesar (Bača dkk., 2019). Berikut lema yang diberikan oleh Ryan dkk. (Bača dkk., 2019).

Lema 1. Untuk setiap graf  $G$ ,

$$\text{res}(G) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \right\rfloor, & \text{jika } |E(G)| \not\equiv 2, 3 \pmod{6} \\ \left\lfloor \frac{|E(G)|}{3} \right\rfloor + 1, & \text{jika } |E(G)| \equiv 2, 3 \pmod{6} \end{cases}$$

Pada kekuatan sisi refleksif, terdapat beberapa graf yang telah diteliti diantaranya pada tahun 2017, Ryan dkk. (Bača dkk., 2019), meneliti graf bintang  $K_{1,n}$  dan graf lintasan  $P_n$ , kemudian di tahun yang sama, Tanna dkk. (2017) juga meneliti graf roda  $W_n$ , graf kipas  $F_n$ , dan graf basket  $B_n$ . Bača dkk. (2019) juga meneliti graf lingkaran  $C_n$ . Kemudian pada tahun 2020, Indriati dkk. (2020) meneliti graf lintasan korona graf lengkap  $K_1$  dan graf lintasan korona graf lintasan  $P_2$ . Pada penelitian ini akan ditentukan  $\text{res}(L_n)$  untuk  $n > 1$  yang belum pernah diteliti sebelumnya dan dapat digunakan untuk meneliti topik lain seperti kekuatan titik refleksif pada graf tangga  $L_n$ .

## METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka dengan menggunakan referensi berupa jurnal, buku-buku atau tulisan-tulisan mengenai pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yang pertama adalah menentukan batas bawah dari graf tangga  $L_n$  berdasarkan Lema 1 yang diberikan oleh Ryan dkk. (Bača dkk., 2019). Kemudian melakukan pelabelan pada graf tangga  $L_n$  yang memenuhi batas bawah sesuai dengan Lema yang diberikan oleh Ryan dkk. (Bača dkk., 2019). Selanjutnya, menghitung bobot masing-masing sisi dari graf tangga  $L_n$  sedemikian sehingga bobot setiap sisi berbeda. Setelah itu menentukan pola umum pelabelan refleksif tak teratur sisi dan pola umum bobot sisi dari pelabelan refleksif tak teratur sisi dari graf tangga  $L_n$ . Tahap terakhir adalah mencari pola umum  $\text{res}(L_n)$  untuk  $n > 1$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf tangga adalah graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan  $n$  titik (Galian, 2018). Graf tangga dinotasikan dengan  $L_n$ , sehingga  $L_n = P_2 \times P_n$ . Graf tangga  $L_n$  memiliki *order*  $|V(L_n)| = 2n$  dan *size*  $|E(L_n)| = 3n-2$ . Graf tangga terdiri dari himpunan titik  $V(L_n) = \{x_i, y_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(L_n) = \{x_i y_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ . Kekuatan sisi refleksif (*res*) dari graf tangga dapat diperoleh melalui Teorema 1.

Teorema 1. Untuk setiap  $n > 1$ ,

$$\text{res}(L_n) = n.$$

*Bukti.* Graf tangga mempunyai  $3n-2$  sisi. Dengan menggunakan Lema dari Ryan dkk. (Bača dkk., 2019) diperoleh batas bawah dari  $\text{res}(L_n)$  untuk  $n > 1$  sebagai berikut,

$$\text{res}(G) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{3n-2}{3} \right\rfloor, & \text{jika } (3n-2) \not\equiv 2, 3 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{3n-2}{3} \right\rfloor + 1, & \text{jika } (3n-2) \equiv 2, 3 \pmod{6}. \end{cases}$$

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan:

$$\text{res}(L_n) \geq n, \text{ untuk setiap } n > 1.$$

Selanjutnya, dibuktikan batas atas pada graf  $L_n$ . Dikonstruksi  $f$  pada pelabelan- $k$  graf  $L_n$ , yaitu,

$$f(x_i) = 0, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

$$f(y_i) = \begin{cases} n-1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, n \text{ ganjil,} \\ n-2, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, n \text{ genap,} \\ n, & \text{untuk } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n, n \text{ genap.} \end{cases}$$

$$f(x_i x_{i+1}) = i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, \text{ setiap } n.$$

$$f(x_i y_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk setiap } i, n \text{ ganjil,} \\ i+1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{n}{2}, n \text{ genap,} \\ i-1, & \text{untuk } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n, n \text{ genap.} \end{cases}$$

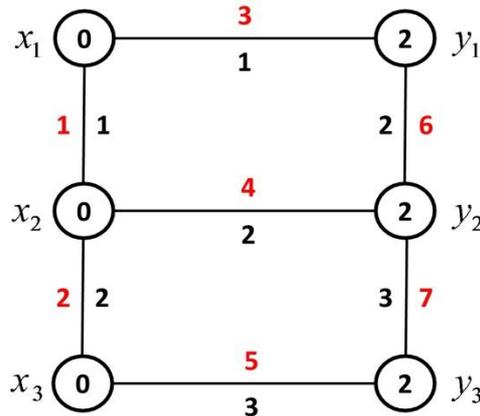
$$f(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} i+1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1, n \text{ ganjil, } n = 2, \\ i+3, & \text{untuk } 1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1, n \text{ genap, } n \neq 2, \\ i+1, & \text{untuk } i = \frac{n}{2}, n \text{ genap,} \\ i-1, & \text{untuk } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n-1, n \text{ genap.} \end{cases}$$

Pada pelabelan- $k$  tersebut dapat diketahui bahwa label titik merupakan bilangan bulat genap dan label terbesar dari titik dan sisi yaitu  $n$  untuk setiap  $n$ . Sehingga diperoleh bobot sisi sebagai berikut,

$$\begin{aligned} wt(x_i x_{i+1}) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1. \\ wt(x_i y_i) &= n + (i-1), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n. \\ wt(y_i y_{i+1}) &= 2n + (i-1), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat dilihat bahwa setiap sisi pada graf  $L_n$  memiliki bobot yang berbeda-beda. Batas bawah sama dengan batas atas dari  $res(L_n)$ . Oleh karena itu,  $f$  memenuhi elemen pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi dan mempunyai kekuatan sisi refleksif ( $res$ ) sesuai Teorema 1. Dengan demikian, teorema terbukti.

Gambar 1 merupakan ilustrasi dari pelabelan-3 refleksif tak teratur sisi graf  $L_3$ . Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan nama dan label titik dan sisi, sedangkan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



Gambar 1. Pelabelan-3 refleksif tak teratur sisi graf  $L_3$

### KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kesimpulan yaitu kekuatan sisi refleksif graf tangga  $res(L_n)$  untuk  $n > 1$  adalah  $n$ . Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan refleksif tak teratur sisi maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan titik refleksif pada graf tangga  $(L_n)$ .

### DAFTAR RUJUKAN

- Bača, M., S. Jendrol', M. Miller, and J. Ryan. 2007. *On Irregular Total Labeling*. *Discrete Mathematics* **307**, 1378-1388.
- Bača, M., M. Irfan, A. A. Semaničová-Feňovíková, and D. Tanna. 2019. *Note on edge irregular reflexive labelings of graphs*. *AKCE International Journal of Graph and Combinatorics* 16, 145-157.
- Galian, J. A. 2018. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. *The Electronic Journal of Combinatorics*, no. #DS6 21, 1-502.
- Indriati, D., Widodo, and Rosyida, I. 2020. *Edge Irregular Reflexive Labeling on Corona of Path and Other Graph*. *Journal of Physics: Conference Series*.
- J. Ryan, B. Munasinghe, and D. Tanna. *Reflexive Irregular Labelings* (preprint).
- Tanna, D., J. Ryan, A. and Semaničová-Feňovíková. 2017. *Edge Irregular Reflexive Labeling of Prisms and Wheels*. *Australasian Journal of Combinatorics* 69, (3): 394-401.
- Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Birkhäuser, Basel, Berlin.