PRISMA 5 (2022): 845-849
PRISMA, PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA
https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/
ISSN 2613-9189

Pelabelan Harmonis pada Graf Hati Bolak-balik (H_n)

Ida Indah Sari[a,*], Kurniawan Atmadja[b]

[a,b]*Prodi Matematika FSTI – ISTN , Jalan Moh. Kahfi II, Bhumi Srengseng Indah Jakarta Selatan,12640, Indonesia*

Alamat Surel: idagreyshaa@gmail.com [1], kurniawan_atmadja@istn.ac.id

Abstrak

Graf $G(V,E)$, atau bisa ditulis$G$, terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan simpul tak kosong V, dan himpunan sisi E. Bila jumlah simpul dinotasikan sebagai$|V| =$ p, dan bila jumlah sisi dinotasikan $|E| =$ q. $|E| \geq |V|$ adalah salah satu syarat pelabelan harmonis. Pelabelan harmonisadalah fungsi injektif $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_E$, yang menginduksi fungsi pelabelan sisi(xy) $f^* : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_E$, dimana saat sisi (x,y) dilabel $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\,|E|)$ menghasilkan label sisi berbeda. Pada makalah ini, dibahas proses konstruksi pelabelan harmonis pada graf hati bolak-balik$\boldsymbol{H_n}$, dimana$p = 3n + 1$, dan $q = 6n - 1$.Dengan bentuk konstruksi dari graf $\boldsymbol{H_n}$**,** lalu diberilabel dari setiap simpul dan sisi,sedemikian sehinggahimpunan simpul dari $\boldsymbol{H_n}$ adalah $V(H_n) = \bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4}\cup\bar{5} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, \dots\}$, dan himpunan sisi $\boldsymbol{H_n}$adalah $E(H_n) = \bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4}\cup\bar{5}\bar{0}\cup\bar{6}\cup\bar{7}\cup\bar{8}\cup\bar{9}\cup\overline{10}\cup\overline{11} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17, \dots\}$. Dinamakan graf hati bolak-balik karena bentuk dari hasil temuan konstruksinya hampir serupa dengan bentuk hati yang berbolak-balik.Ditunjukan pada makalah ini bahwa graf hati bolak-balik merupakan graf harmonis. Tujuan dari penulisan ini adalah menambah koleksi graf harmonis.

Kata kunci:

graf hati bolak-balik, graf harmonis, pelabelan graf.

1. Pendahuluan

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, salah satu cabang ilmu matematika yang dapat dikatakan tengah berkembang pesat adalah teori graf, karena telah banyak yang mempelajari serta menekuninya baik secara teori maupun pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari. Dalam teori graf, masih banyak hal-hal baru yang dapat dieksplorasi lebih mendalam, salah satunya adalah pelabelan graf yang menjadi topik pada makalah penelitian ini.

Pada makalah ini, akan dibahas suatu penelitian tentang salah satu jenis pelabelan graf, yaitu tentang pelabelan harmonis pada graf hati bolak-balik H_n. Graf yang memiliki pelabelan harmonis dikatakan sebagai graf harmonis. Misalkan, Graf $G(V,E)$, atau bisa ditulis G, adalah graf yang terdiri dari dua himpunan berhingga, yaitu himpunan simpul tak kosong V , dan himpunan sisi E. Bila jumlah simpul dinotasikan sebagai$|V| =$ p, dan bila jumlah sisi dinotasikan $|E| =$ q. $|E| \geq |V|$ adalah salah satu syarat pelabelan harmonis . Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_E$, yang menginduksi fungsi pelabelan sisi (xy) $f^* : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_E$, dimana saat sisi (x,y) dilabel $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\,|E|)$ menghasilkan label sisi berbeda [Graham, R. L., Sloan, N. J. (1980)].

Beberapa kelas dari hasil temuan graf yang sudah dikategorikan sebagai graf harmonis antara lain graf tangga segitiga [Atmadja, K., Sugeng, K. A., Yuniarko, T. (2014)], graf tangga segitiga variasi [Atmadja, K., Sugeng, K. A. (2017)], graf tangga segitiga jembatan [Atmadja, K., Marhaeni. (2020)], graf tangga segi empat variasi [Atmadja, K. (2020)]. Kini berlanjut pada kajian graf hati bolak-balik H_n yang akan ditunjukan sebagai graf harmonis. Pada makalah ini, akan dibahas proses konstruksi pelabelan harmonis pada graf hati bolak-balik H_n yang kemudian akan ditunjukan bahwa graf hati bolak-balik H_n untuk n $\geq$ 2 adalah graf harmonis. Tujuan dari penulisan ini adalah menambah koleksi graf harmonis.

2. Metode

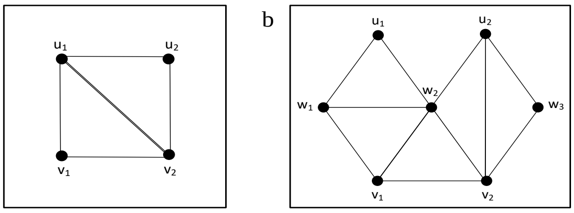
To cite this article:
Sari, I. I., Atmadja, K. (2022). Pelabelan Harmonis pada Graf Hati Bolak-balik *(H_n).PRISMA*, *Prosiding Seminar Nasional Matematika 5*, 845-849

Pada penelitian ini, merujuk dari graf tangga segitiga LS_n[Atmadja, K., Sugeng, K. A., Yuniarko, T. (2014)], yang bentuk konstruksinya dirubah sedemikian rupa, sehingga terbentuk graf baru, yaitu graf hati bolak-balik H_n. Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu dengan tahapan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan pengkajian tentang graf tangga segitiga LS_n.
2. Melakukan modifikasi graf tangga segitiga LS_n.
3. Membuat pola graf hati bolak-balik.H_n.
4. Memberikan label pada setiap simpul dan sisi dari graf H_n.
5. Membuktikan secara formal sesuai persyaratan graf harmonis.

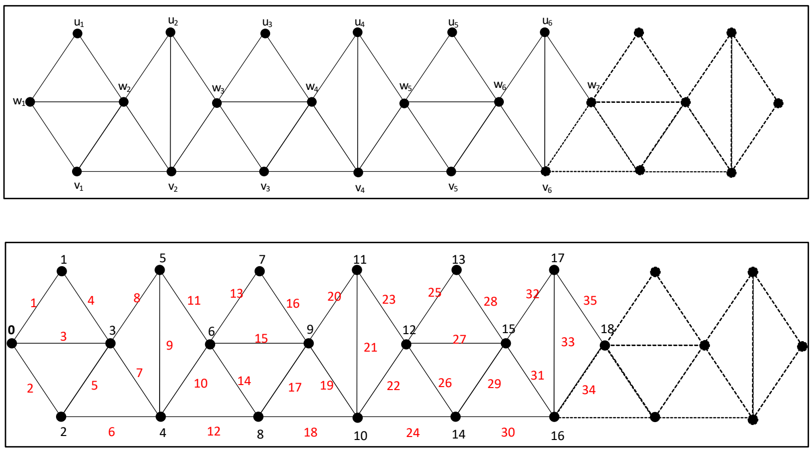
3. Hasil dan Pembahasan

Dalam rangka memudahkan ilustrasi, terlebih dahulu diberikan graf tangga segitiga LS_ndan graf hati bolak-balik H_n untuk n = 2. Dapat dilihat pada gambar 1(a) dan 1(b) berikut ini :



Gambar 1. (a) graf tangga segitiga LS_n; (b) graf hati bolak-balik H_n.

Sebelum pada pokok pembahasan, diberikan tampilan konstruksi dan pelabelan pada graf hati bolak-balik H_n, dengan $p = 3n + 1$ dan $q = 6n - 1$. Dapat dilihat pada gambar 2(a) dan 2(b) sebagai berikut :



Gambar 2. (a) konstruksi graf hati bolak-balik H_n ; (b) pelabelan graf hati bolak-balik H_n.

Selanjutnya, akan dibahas proses kontruksi pelabelan harmonis graf H_n dengan lebih terperinci beserta pembuktian teorema bahwa graf hati bolak balik $H_n$adalah graf harmonis.

Teorema :

Graf hati bolak-balik (H_n) untuk n ≥ 2 dengan $p = 3n + 1$ dan $q = 6n - 1$ adalah graf harmonis.

Bukti :

1. Definisikan pelabelan simpul (V)untuk graf hati bolak-balik (H_n) sebagai berikut :

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i - 2\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n \\ 3i - 1\ ;\ i \text{ genap} ; 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (1)$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 3i-1\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \\ 3i-2\ ;\ i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \end{cases} \quad (2)$$

$$f(w_i) = 3i - 3\ ; 1 \le i \le n+1 \quad (3)$$

2. Definisikan pelabelan sisi (*E*) untuk graf hati bolak-balik (H_n) sebagai berikut :

$$f^*(u_i w_i) = \begin{cases} (fu_i) + (fw_i) = 3i-2\ +\ 3i-3 =\ 6i-5\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i\ \le n+1 \\ (fu_i) + (fw_i) = 3i-1\ +\ 3i-3 =\ 6i-4\ ;\ i \text{ genap} ; 2 \le i\ \le n+1 \end{cases} \quad (4)$$

$$f^*(u_i w_{i+1}) = \begin{cases} (fu_i) + (fw_{i+1}) = 3i-2\ +\ 3(i+1)-3 = 6i-2\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n+1 \\ (fu_i) + (fw_{i+1}) = 3i-1\ +\ 3(i+1)-3 =\ 6i-1\ ; i \text{ genap} ; 2 \le i \le n+1 \end{cases} (5)$$

$$f^*(w_{2i-1} w_{2i}) = (fw_{2i-1}) + (fw_{2i}) = (3(2\mathrm{i}-1)-3+(3(2\mathrm{i})-3) = 12i-9\ ;\ i = 1,2,3,\dots,n (6)$$

$$f^*(v_i w_i) = \begin{cases} (fv_i) + (fw_i) = 3i-1\ +\ 3i-3 =\ 6i-4\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i\ \le n+1 \\ (fv_i) + (fw_i) = 3i-2\ +\ 3i-3 =\ 6i-5\ ;\ i \text{ genap} ; 2 \le i\ \le n+1 \end{cases} \quad (7)$$

$$f^*(v_i w_{i+1}) = \begin{cases} (fv_i) + (fw_{i+1}) = 3i-1\ +\ 3(i+1)-3 = 6i-1\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n+1 \\ (fv_i) + (fw_{i+1}) = 3i-2\ +\ 3(i+1)-3 =\ 6i-2\ ; i \text{ genap} ; 2 \le i \le n+1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f^*(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} (fv_i) + (fv_{i+1}) = 3i-1\ +\ 3(i+1)-1 = 6i\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \\ (fv_i) + (fv_{i+1}) = 3i-2\ +\ 3(i+1)-2 =\ 6i\ ; i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \end{cases} \quad (9)$$

$$f^*(u_{2i} v_{2i}) = (fu_{2i}) + (fv_{2i}) = (3(2\mathrm{i})-2+(3(2\mathrm{i})-1) = 12i-3\ ;\ i = 1,2,3,\dots,n \quad (10)$$

Dari pernyataan (1) sampai (3), disimpulkan bahwa perhitungan label simpul pada graf hati bolak-balik$H_n$dapat dikelompokan sebagai berikut :

- Pelabelan simpul untuk i ganjil; $1 \le i \le n$

$$\begin{aligned} f(u_i) &= 3i-2 \\ &\in \{1,7,13,\dots,3n-2\} \\ &= 1\ mod\ 6 = \bar{1} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 3i-1 \\ &\in \{2,8,14,\dots,3n-1\} \\ &= 2\ mod\ 6 = \bar{2} \end{aligned} \quad (12)$$

- Pelabelan simpul untuk i genap; $2 \le i \le n$

$$\begin{aligned} f(u_i) &= 3i-1 \\ &\in \{5,11,17,\dots,3n-1\} \\ &= 5\ mod\ 6 = \bar{5} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 3i-2 \\ &\in \{4,10,16,\dots,3n-2\} \\ &= 4\ mod\ 6 = \bar{4} \end{aligned} \quad (14)$$

- $$\begin{aligned} f(w_i) &= 3i-3\ ; 1 \le i \le n+1 \\ &\in \{0,3,6,9,12,15,18,\dots,3n-3\} \\ &= 0\ mod\ 6\ \cup 3\ mod\ 6 \\ &= \bar{0} \cup \bar{3} \end{aligned} \quad (15)$$

Dari persamaan (11) sampai (15), dapat dilihat bahwa himpunan label simpul$f(V(H_n) = \bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4}\cup\bar{5} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\dots 3n-1\}$, dan label setiap simpul yang dihasilkan berbeda-beda. Sehingga, f merupakan fungsi injektif yang memenuhi pemetaan $f: (V(H_n) \to \mathbb{Z}_E$.

Dengan cara yang serupa untuk label simpul, dari persamaan (4) sampai (10),perhitungan label sisipada graf hati bolak-balik$H_n$diperoleh sebagai berikut :

$$f^*(u_iw_i) = \begin{cases} (fu_i) + (fw_i) = 3i-2 + 3i-3 = 6i-5\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n+1 \\ (fu_i) + (fw_i) = 3i-1 + 3i-3 = 6i-4\ ;\ i \text{ genap} ; 2 \le i \le n+1 \end{cases}$$

$$\in \{1,8,13,20,25,32,\ldots\}$$

$$= (1 \, mod \, 12) \bigcup (8 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{1} \cup \bar{8} \qquad (16)$$

$$f^*(u_iw_{i+1}) = \begin{cases} (fu_i) + (fw_{i+1}) = 3i-2 + 3(i+1)-3 = 6i-2\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n+1 \\ (fu_i) + (fw_{i+1}) = 3i-1 + 3(i+1)-3 = 6i-1\ ; i \text{ genap} ; 2 \le i \le n+1 \end{cases}$$

$$\in \{4,11,16,23,28,35,\ldots\}$$

$$= (4 \, mod \, 12) \bigcup (11 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{4} \cup \overline{11} \qquad (17)$$

$$f^*(w_{2i-1}w_{2i}) = (fw_{2i-1}) + (fw_{2i}) = (3(2\mathrm{i}-1) - 3 + (3(2\mathrm{i}) - 3) = 12i - 9\ ;\ i = 1,2,3,\ldots,n$$

$$\in \{3,15,27,\ldots\}$$

$$= (3 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{3} \qquad (18)$$

$$f^*(v_iw_i) = \begin{cases} (fv_i) + (fw_i) = 3i-1 + 3i-3 = 6i-4\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n+1 \\ (fv_i) + (fw_i) = 3i-2 + 3i-3 = 6i-5\ ;\ i \text{ genap} ; 2 \le i \le n+1 \end{cases}$$

$$\in \{2,7,14,19,26,31,\ldots\}$$

$$= (2 \, mod \, 12) \bigcup (7 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{2} \cup \bar{7} \qquad (19)$$

$$f^*(v_iw_{i+1}) = \begin{cases} (fv_i) + (fw_{i+1}) = 3i-1 + 3(i+1)-3 = 6i-1\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n+1 \\ (fv_i) + (fw_{i+1}) = 3i-2 + 3(i+1)-3 = 6i-2\ ; i \text{ genap} ; 2 \le i \le n+1 \end{cases}$$

$$\in \{5,10,17,22,29,\ldots\}$$

$$= (5 \, mod \, 12) \bigcup (10 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{5} \cup \overline{10} \qquad (20)$$

$$f^*(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} (fv_i) + (fv_{i+1}) = 3i-1 + 3(i+1)-1 = 6i\ ;\ i \text{ ganjil} ; 1 \le i \le n \\ (fv_i) + (fv_{i+1}) = 3i-2 + 3(i+1)-2 = 6i\ ; i \text{ genap} ; 2 \le i \le n \end{cases}$$

$$\in \{6,12,18,24,30,\ldots\}$$

$$= (6 \, mod \, 12) \bigcup (12 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{6} \cup \bar{0} \qquad (21)$$

$$f^*(u_{2i}v_{2i}) = (fu_{2i}) + (fv_{2i}) = (3(2\mathrm{i}) - 2 + (3(2\mathrm{i}) - 1) = 12i - 3\ ;\ i = 1,2,3,\ldots,n$$

$$\in \{9,21,33,45,\ldots\}$$

$$= (9 \, mod \, 12)$$

$$= \bar{9} \qquad (22)$$

Dapat dilihat dari persamaan (16) sampai dengan (22) diperoleh himpunan label sisi$f^*(E(H_n) = \bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3}\cup\bar{4}\cup\bar{5}\bar{0}\cup\bar{6}\cup\bar{7}\cup\bar{8}\cup\bar{9}\cup\overline{10}\cup\overline{11} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,\ldots.\}$.

Nampak bahwa pelabelan sisi $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\,|E|)$ menghasilkan label sisi yang berbeda, sehingga pemetaan f^* merupakan pemetaan bijektif. Jadi, terbukti bahwa graf hati bolak-balik $H_n$adalah graf harmonis.

4. Simpulan

Dari hasil kajian penelitian graf hati bolak-balik H_n, nampak bahwa pelabelan simpulnya menginduksi pelabelan sisi (xy) dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\ |E|)$ menghasilkan label sisi berbeda. Dengan demikian graf hati bolak-balik H_n hasil modifikasi dari graf tangga segitiga LS_n adalah graf harmonis.

Daftar Pustaka

Atmadja, K., Sugeng, K. A., Yuniarko, T. (2014). Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga, *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII*. ITS. Surabaya. 1435-1439.

Atmadja,K., Sugeng,K.A. (2017). Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Variasi, *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. Departemen Matematika FMIPA UI.642-647.

Atmadja, K., Marhaeni. (2020). Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Jembatan XJ_n. *PRISMA 3,Prosiding Seminar Nasional Matematika*. Universitas Negeri Semarang. Semarang. 25-28.

Atmadja, K. (2020). Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segi Empat Variasi. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pembelajaran (SNMP).*Universitas Negeri Malang. Malang. 320-324.

Graham, R. L., Sloan, N. J. (1980). On Additive Bases and Harmonius Graphs. *SIAM.J.Alg. Discrete Math.* (Vol 1, No 3, 382-404).