



Vol. 3, September 2017
ISSN : 1907 - 2562

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2017

Departemen Matematika FMIPA UI
Depok, 11 Februari 2017

Disponsori oleh:



IndonesiaRe

Didukung oleh:



TOKIOMARINE
INSURANCE GROUP



PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
(THE SOCIETY OF ACTUARIES OF INDONESIA)

SNM2017



WILAYAH
JABAR-DKI JAKARTA-BANTEN

KATA SAMBUTAN

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2017

Dekan FMIPA Universitas Indonesia

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Salam sejahtera untuk kita semua.



Atas nama Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, dengan bangga saya mengucapkan selamat kepada semua peserta pada Seminar Nasional Matematika 2017 yang diselenggarakan pada tanggal 11 Februari 2017 di Universitas Indonesia, Depok. Ucapan terima kasih saya sampaikan kepada pihak IndoMS Pusat dan IndoMS Wilayah JABAR, Banten, dan DKI Jakarta atas kepercayaannya kepada Universitas Indonesia dalam hal ini Departemen Matematika FMIPA sebagai tuan rumah kegiatan sarasehan dan sosialisasi program kerja IndoMS Pusat dan IndoMS Wilayah JABAR, Banten, dan DKI Jakarta.

Seminar Nasional ini merupakan seminar yang telah dilaksanakan secara bergantian oleh Universitas Indonesia dan Universitas Padjadjaran sejak 20 tahun yang lalu. Pihak Universitas Indonesia sebagai salah satu perguruan tinggi yang menjadi pelopor perkembangan peran ilmu pengetahuan di Indonesia tidak henti-hentinya mendorong segenap civitas akademika, termasuk di FMIPA UI untuk menghidupkan penelitiannya agar dapat memberikan dampak nyata pada kemajuan bangsa dan tanah air.

Saya ucapkan terima kasih kepada para pembicara utama, peserta dan tentunya kepada panitia pelaksana SNM 2017 ini. Semoga kegiatan ini dapat memberikan manfaat yang besar kepada kita semua dan bangsa Indonesia.

Salam hangat,

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Dekan FMIPA Universitas Indonesia

Dr. rer. nat. Abdul Haris

Gubernur IndoMS JABAR, Banten, dan DKI Jakarta



Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Salam sejahtera untuk kita semua.

Atas nama *Indonesian Mathematical Society (IndoMS)*, sebuah kebanggaan yang besar bagi saya untuk menyampaikan selamat kepada semua peserta Seminar Nasional Matematika (SNM) 2017 yang diadakan pada tanggal 11 Februari 2017 di Departemen Matematika FMIPA UI, Depok.

IndoMS pada tahun ini bekerjasama dengan pihak penyelenggara lokal, mengadakan cukup banyak aktivitas temu ilmiah di berbagai daerah di Indonesia, termasuk salah satunya pada tahun ini yaitu SNM 2017 yang dirangkaikan dengan Sarasehan IndoMS Wilayah JABAR, Banten, dan DKI Jakarta serta sosialisasi program kerja IndoMS Pusat. Penyelenggaraan SNM 2017 tidak hanya merupakan program berkelanjutan dari pihak IndoMS, Universitas Indonesia dan Universitas Padjadjaran, namun juga merupakan sebuah kegiatan yang akan membawa peluang besar kepada seluruh pihak yang terlibat untuk menyeminarkan dan mendiskusikan hasil penelitian di berbagai bidang matematika.

Kami mengucapkan terima kasih kepada para pembicara utama, peserta dari berbagai daerah di Indonesia, dan panitia SNM 2017. Ucapan terima kasih khususnya kami sampaikan kepada Departemen Matematika, FMIPA Universitas Indonesia yang bersedia menjadi tuan rumah. Saya berharap agar SNM 2017 ini dapat memberikan manfaat yang besar kepada kita semua.

Salam hangat,

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Gubernur IndoMS JABAR, Banten dan DKI Jakarta.

Alhadi Bustamam, Ph.D.

Ketua Panitia Seminar Nasional Matematika 2017



Salam sejahtera bagi kita semua.

Matematika sebagai salah satu bidang ilmu yang penerapannya banyak digunakan di berbagai bidang, telah diterapkan pula pada berbagai kajian dan penelitian di masalah lingkungan. Pentingnya masalah pelestarian dan bagaimana mengatasi perubahan-perubahan fenomena lingkungan tersebut menjadi dasar dalam penentuan tema utama pada Seminar Nasional Matematika (SNM) 2017 ini, yakni “Peranan Matematika dalam Memahami Fenomena Lingkungan”.

Seminar Nasional Matematika merupakan perkembangan dari Seminar Matematika Bersama UI-UNPAD yang telah dilaksanakan sejak lebih dari 20 tahun yang lalu. SNM merupakan salah satu forum nasional bagi para matematikawan, peminat atau pemerhati Matematika dan para pengguna Matematika untuk saling berbagi pengetahuan dan pengalaman terhadap hasil penelitian dan penerapan matematika di berbagai hal. Melalui SNM 2017 diharapkan peserta yang berasal dari berbagai perguruan tinggi dan institusi di Indonesia dapat berpartisipasi dan berkontribusi sesuai dengan kepakaran bidang masing-masing di dalam mengatasi dan menyelesaikan masalah lingkungan beserta berbagai fenomenanya. Makalah yang masuk ke pihak penyelenggara meliputi berbagai bidang, seperti Analisis dan Geometri, Aljabar, Statistika dan aplikasinya, Matematika Keuangan dan Aktuaria, Kombinatorika, Komputasi, Pendidikan Matematika, Optimisasi, Pemodelan Matematika dan bidang terapan lainnya.

Penyelenggara SNM 2017 memberikan apresiasi yang setinggi-tingginya kepada berbagai pihak, antara lain Himpunan Matematika Indonesia wilayah Jabar, DKI Jakarta, dan Banten, Program Studi Matematika Universitas Padjadjaran, serta FMIPA UI yang telah memberikan dukungan dan bantuan dalam penyelenggaraan seminar nasional ini. Tidak lupa kami ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada para sponsor yang telah berkontribusi dan kepada panitia SNM 2017 sehingga SNM 2017 dapat terselenggara.

Hormat kami,
Ketua Panitia SNM 2017

Bevina D. Handari Ph.D

UCAPAN TERIMA KASIH

Panitia Seminar Nasional Matematika 2017 menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada Pimpinan Universitas, Pimpinan Fakultas, Pimpinan Departemen, dan para sponsor, atas dukungannya dalam bentuk dana, fasilitas, dan lain-lain, untuk terselenggaranya seminar ini.

Secara khusus Panitia Seminar Nasional Matematika 2017 menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Indonesia
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
3. Ketua Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
4. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
5. Direktur Utama PT Reasuransi Indonesia Utama
6. Rektor Universitas Gunadarma
7. Direktur Utama PT Tokio Marine Life Insurance Indonesia
8. Direktur Utama PT AIA Financial Indonesia
9. Direktur Utama PT BNI Life Insurance
10. Direktur Utama BPJS Ketenagakerjaan
11. Ketua Persatuan Aktuaris Indonesia (PAI)
12. Direktur Utama PT Asuransi Cigna

Panitia Seminar Nasional Matematika 2017 juga mengucapkan terima kasih kepada pembicara utama Prof. Dr. Jatna Supriatna, M.Sc (Ketua RCCC Universitas Indonesia), Dr. Sri Purwani (Dosen Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran), Dr. Ardhasena Sopaheluwakan (Kepala Bidang Litbang Klimatologi dan Kualitas Udara BMKG), para pemakalah pada sesi paralel, setiap tamu undangan, dan seluruh peserta Seminar Nasional Matematika 2017.

DAFTAR PANITIA SNM 2017

PELINDUNG

1. Prof. Dr. Ir. Muhammad Anis, M.Met. (Rektor Universitas Indonesia)
2. Dr. rer. nat. Abdul Haris (Dekan FMIPA Universitas Indonesia)

KOMISI PENGARAH

1. Alhadi Bustamam, Ph.D. (Gubernur IndoMS JABAR, DKI Jakarta, dan Banten, sekaligus sebagai Ketua Departemen Matematika, FMIPA Universitas Indonesia)
2. Prof. Dr. A.K. Supriatna (Ketua Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Padjadjaran)

PANITIA PELAKSANA

1. Ketua : Bevina D. Handari, Ph.D.
2. Sekretaris : Dr. Dipo Aldila
3. Bendahara : Dra. Siti Aminah, M.Kom.
4. Pendanaan : Mila Novita, S.Si., M.Si.
Dr. Titin Siswantining, DEA.
5. Acara : Nora Hariadi, S.Si., M.Si.
Dra. Ida Fithriani, M.Si.
6. Makalah dan Prosiding : Dra. Siti Nurrohmah, M.Si.
Dr. rer. nat. Hendri Murfi
7. Perlengkapan : Maulana Malik, S.Si., M.Si.
Dr. Saskya Mary Soemartojo, M.Si.
Suci Fratama Sari, S.Si., M.Si.
Gianinna Ardanewari, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN	ii
Dekan FMIPA Universitas Indonesia	iii
Gubernur IndoMS JABAR, Banten, dan DKI Jakarta.....	iv
Ketua Panitia Seminar Nasional Matematika 2017	v
UCAPAN TERIMA KASIH	vi
DAFTAR PANITIA SNM 2017	vii
DAFTAR ISI.....	viii
PEMBICARA UTAMA.....	xii
PERANAN MATEMATIKA DALAM MEMAHAMI FENOMENA LINGKUNGAN.....	xiii
Prof. Dr. Jatna Supriatna, M.Sc	xiii
UNDERSTANDING INDONESIAN ENVIRONMENTAL PHENOMENA, AND IMPROVING HUMAN LIVES	xv
Dr. Sri Purwani	xv
PERSPEKTIF SINGKAT IKLIM DI INDONESIA: PEMODELAN DAN STATUS PERUBAHAN IKLIM.	xvi
Dr. Ardhasena Sopaheluwakan	xvi
SESI PARALEL.....	614
KOMBINATORIK	614
PENGGUNAAN MATRIKS ANTIADJACENCY DALAM Mencari LAST COMMON NODE UNTUK MENYELESAIKAN MASALAHTRAFFIC ASSIGNMENT PROBLEM	615
RESKIE A. PRATAMA, KEVIN KAMAL, SYAHRIL RAMADHAN, KIKI A. SUGENG	615
HUBUNGAN NILAI EIGEN TERBESAR MATRIKS ANTIADJACENCY DENGAN DERAJAT GRAF SEDERHANA TAK BERARAH	623
AKANE VIEBIA AYA, NURUL MAGHFIRAH, KIKI ARIYANTI SUGENG	623

POLINOMIAL KARAKTERISTIK DAN SPEKTRUM MATRIKS ADJACENCY DAN ANTI-ADJACENCY DARI GRAF FRIENDSHIP TAK BERARAH DAN BERARAH	628
BUDI PONIAM ^{1,2} , KIKI A. SUGENG ²	628
PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TANGGA SEGITIGA VARIASI xN	642
KURNIAWAN ATMADJA ¹ , KIKI A. SUGENG ²	642
KOMPUTASI.....	648
ALGORITMA PARTICLE SWARM OPTIMIZATION DAN TERAPANNYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH PEMOTONGAN ROL KERTAS	649
HELVETIKA AMPERIANA ¹ , Y G HARTONO ²	649
APLIKASI METODE PENGGEROMBOLAN ALGORITMA KHUSUS DALAM PENENTUAN ZONA BIAYA HAK PENGGUNA FREKUENSI RADIO	660
ERFIANI.....	660
ALGORITMA GENETIK STEADY STATE BERDASARKAN FUNGSI PEMBOBOTAN BIAYA DAN RELIABILITAS DALAM MENENTUKAN PERAWATAN OPTIMAL MESIN	667
BUDHI HANDOKO ¹ , YENY KRISTA FRANTY ² , SRI WINARNI ³	667
PENGELOMPOKAN DAERAH RAWAN BENCANA BANJIR DI INDONESIA TAHUN 2013 MENGGUNAKAN FUZZY C-MEAN.....	677
AMANDA PUTRI PERTIWI ¹ , ROBERT KURNIAWAN ²	677
APLIKASI FUZZY C-MEANS PADA PREVALENSI GLOBAL YOUTH TOBACCO SURVEY	688
INTAN PRIMASARI, ZUHERMAN RUSTAM, DHIAN WIDYA.....	688
APLIKASI FUZZY MADM UNTUK DETEKSI POTENSI SERANGAN JANTUNG BERDASARKAN METODE AHP DAN TOPSIS	695
ZENIA AMARTI, NURSANTI ANGGRIANI, ASEP K. SUPRIATNA	695
IMPLEMENTASI TEOREMA DAERAH KAJIAN DAN TEOREMA KOMPOSISI IRISAN HIMPUNAN PADA ETNOINFORMATIKA PENAMAAN DESA DI LIMA WILAYAH PROVINSI JAWA BARAT	706
ATJE SETIAWAN ABDULLAH ¹ DAN BUDI NURANI RUCHJANA ² ..	706
ALGEBRAIC ATTACK PADA SIMPLIFIED DATA ENCRYPTION STANDARD (S-DES)	726

FADILA PARADISE ¹ , SANTI INDARJANI ²	726
BIT PATTERN BASED INTEGRAL ATTACK PADA ALGORITMA PRESENT	736
RYAN SETYO PAMBUDI ¹ , SANTI INDARJANI ²	736
PERBANDINGAN KARAKTERISTIK S-BOX ALGORITMA PRESENT DAN I-PRESENT.....	745
ANNISA DEWI SALDYAN ¹ , SARI AGUSTINI HAFMAN ²	745
S-NCI: DESAIN PROTOKOL KEY ESTABLISHMENT	758
MOHAMAD ALI SADIKIN ¹ , SUSILA WINDARTA ²	758
KLASIFIKASI MULTIKELAS KANKER OTAK DENGAN METODE SUPPORT VECTOR MACHINE	768
VINEZHA PANCA ¹ , ZUHERMAN RUSTAM ²	768
ANALISIS AKURASI DARI METODE MACHINE LEARNING UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH CREDIT SCORING	778
NURUL MAGHFIRAH, ZUHERMAN RUSTAM	778
PENGEMBANGAN MEDIA AUGMENTED REALITY BERBASIS ANDROID UNTUK PEMBELAJARAN DIMENSI TIGA	785
FARIS FATHAN ¹ , TITA KHALIS MARYATI ² , DINDIN SOBIRUDDIN ³	785
APLIKASI ADAPTIVE NEURO-FUZZY INFERENCE SYSTEM PADA PENGAMBILAN KEPUTUSAN DALAM INVESTASI SAHAM	797
I PUTU ADITYA WARDANA, ZUHERMAN RUSTAM	797
PEMILIHAN PERSONAL COMPUTER (PC) TERBAIK BERBASIS ANDROID MENGGUNAKAN METODE FUZZY ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS (FAHP).....	805
AKIK HIDAYAT ¹ , EBBY SYABILAL R ² , RUDI ROSYADI ³ , ERICK PAULUS ⁴	805
PENCARIAN IMPROBABLE DIFFERENTIAL 9 DAN 10 ROUND PRESENT	816
AFIFAH ¹ , SARI AGUSTINI H. ²	816
PENCARIAN KARAKTERISTIK DIFERENSIAL 4 ROUND PADA ALGORITMA MACGUFFIN	830
RIDWAN IMAM SYARIF ¹ , DAN SANTI INDARJANI ²	830

PEMODELAN DAN OPTIMASI.....	839
PERBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA-VERNER DAN LAPLACE ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD DALAM SOLUSI PERSAMAAN DIFFERENSIAL NONLINEAR PADA MASALAH BIOMATEMATIKA	840
BETTY SUBARTINI ¹ , RIAMAN ² , DAN ALIT KARTIWA ³	840
PERMODELAN DINAMIK PADA SISTEM PROSES PENGOLAHAN AIR LIMBAH KOLAM STABILISASI FAKULTATIF	850
SUNARSIH ¹ , DIAN HULIYUN RAHMANIA ² , NIKKEN PRIMA PUSPITA ³	850
SOLUSI MASALAH RELAKSASI MELALUI PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL BERORDE (α, β).....	858
E. RUSYAMAN ¹ DAN K. PARMIKANTI ²	858
KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIOLOGI DENGAN VAKSINASI	865
JONNER NAINGGOLAN	865
MODEL OPTIMISASI LINEAR INTEGER UNTUK TWO-STAGE GUILLOTINE CUTTING STOCK PROBLEM DENGAN METODE BRANCH AND BOUND PADA INDUSTRI GARMEN	873
EMAN LESMANA ¹ , JULITA NAHAR ² , ANNISA D.P ³	873
PENERAPAN OPTIMASI MULTI RESPON DENGAN METODE TAGUCHI FUZZY LOGIC.....	884
SRI WINARNI ¹ , BUDHI HANDOKO ² , YENY KRISTA FRANTY ³	884
TERAPAN	893
PENCITRAAN ARAH AKUMULASI PASIR BESI BERDASARKAN KONTRAS KEMAGNETAN DAN FORWARD MODELLING DENGAN MENGUNAKAN METODE GEOFISIKA PASIF PADA DAERAH PANTAI GOA CEMARA, YOGYAKARTA	894
RIZKY RAMADHAN DWIYANTORO	894
TRANSFORMASI STRUKTURAL DAN KETIMPANGAN ANTAR DAERAH DI PROVINSI KALIMANTAN TIMUR	901
ADI SETIAWAN ¹ DAN FITRI KARTIASIH ²	901
EVALUASI TIGA MODEL PENDUGAAN EVAPORASI PANCI (EPAN) DI WILAYAH BALI	911
TRINAH WATI ¹ DAN FATKHUROYAN ²	911

PEMBICARA UTAMA

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2017

PERANAN MATEMATIKA DALAM MEMAHAMI FENOMENA LINGKUNGAN

Prof. Dr. Jatna Supriatna, M.Sc

Ketua RCCC Universitas Indonesia

Abstrak: Pembangunan berkelanjutan (*SDG-Sustainable Development Goal*) yang dicanangkan PBB untuk menggantikan *Millenium Development Goal* (MDG) sudah dimulai sejak awal 2016 dan akan berakhir 2030. Dari 17 goal dari SDG, 10 goal adalah *traditional development*, satu goal adalah kerjasama antar pemangku kepentingan (SDG 17) dan 6 goal adalah *emerging issues* dalam permasalahan lingkungan yaitu Energi terbarukan (SDG 7), Pembangunan kota dan masyarakat (SDG 11), Konsumsi bertanggung jawab (12), Perubahan iklim (SDG 13), Laut dan kehidupan bawah air (SDG 14), dan Kehidupan Flora dan Fauna di darat (SDG 15). Ke enam permasalahan lingkungan dalam pembangunan berkelanjutan yang baru ini tidak ada dalam target pembangunan MDG, sehingga banyak sekali diperlukan riset untuk dapat membuat berbagai kebijakan yang berdasarkan *evidence based decision*, mengadaptasikan rencana sesuai dengan kesiapan dan ketersediaan, pembuatan berbagai *computer and mathematical model* pengembangan SDG sampai 2030, mengarusutamakan SDG ke dalam rencana pembangunan RPJM/RPJP pemerintah pusat dan daerah dan bagaimana membuat MRV (*Measuring, Reporting, Verification*) dari setiap goal yang baru. Peranan pakar matematika sangat besar dalam membantu pelaksanaan pembangunan berkelanjutan. Sebagai contoh adalah masalah perubahan iklim. Masalah perubahan iklim adalah masalah terbesar dunia saat ini. Hasil survey Asahi Glass Foundation (2013) tampak bahwa masalah dunia terbesar saat ini adalah perubahan iklim (20%) dibanding dengan masalah lingkungan lainnya yang berkisar antara 10% (polusi), keanekaragaman hayati (6%) dan yang lainnya. Model-model matematika dan komputer diperlukan untuk mengetahui dampak perubahan iklim terhadap kenaikan permukaan laut, cuaca ekstrim, kesehatan, ekonomi, pertanian, flora dan fauna, ketersediaan pakan, air dan lainnya dalam bentuk *time series*. Untuk MRV, diperlukan pedoman Pelaksanaan Pengukuran, Pelaporan, dan Verifikasi Aksi Mitigasi dan adaptasi dari setiap program di setiap sektor pemerintah, swasta dan

juga termasuk masyarakat. Capaian Aksi Mitigasi dan adaptasi Perubahan Iklim yang akurat, transparan, dan dapat dipertanggungjawabkan hanya dapat dilakukan apabila dilakukan oleh berbagai pakar terintegrasi termasuk pakar matematika dan statistik. Pemerintah harus mengatur (i) tatacara Pengukuran Aksi Mitigasi adaptasi dan Perubahan Iklim, (ii) tatacara pelaporan aksi mitigasi dan adaptasi perubahan iklim (iii) tatacara verifikasi capaian aksi mitigasi dan adaptasi perubahan iklim (iv) tatacara penilaian. Semua pengaturan tersebut memerlukan perhitungan yang pasti dan mendalam karena dampak dari perubahan iklim dapat menghancurkan perekonomian, membahayakan keberadaan ekosistem manusia, dalam jangka panjang dapat mempengaruhi peradaban dunia.

UNDERSTANDING INDONESIAN ENVIRONMENTAL PHENOMENA, AND IMPROVING HUMAN LIVES

Dr. Sri Purwani

Departemen Matematika, FMIPA Universitas Padjadjaran

Abstract: The universe and the environment around us were created perfectly by Allah. However, we find a lot of damage and disaster everywhere (Ar-Rum 30:41). This case, afflicting the environment and people of Indonesia, of course was through a long process. Indonesia, the country with the largest ocean border in the world, has experienced prosperity, well-being and peace in society. Understanding what the cause and how the process of occurrence, can provide answers for future improvements.

Human beings as part of the environment face the same thing. Various disease emerges, afflicts human survival. Imaging Sciences as a branch of knowledge is widely used in medical images analysis, range from disease detection, such as Alzheimer's, asthma, cancer and so on, up to image-guided surgery. This field involves many disciplines, hence providing opportunities for mathematicians to conduct research collaboration with scientists from various disciplines.

Registration and Segmentation, two important processes in the analysis of medical images, aims to find correspondence between two or more images, and attempts to extract structures/tissues within images, respectively. Previously, both processes are done separately. However, information from one process can be used to assist the other, and vice versa. Therefore, we tried to combine both processes implemented on database of MR brain images.

One of Petrovic et al. paper shows that adding structural information in their registration stage improved the result significantly, compared to registration using intensity alone. However, they only used little structural information. We attempted to include more structural information/segmentation in our new methods, and implemented groupwise registration to sets of images, consisting of tissue fraction images, intensity image and images with other structural information. The results of the registration were evaluated by using ground-truth annotation. It was found that ensemble registration using structural information can give a consistent improvement over registration using intensity alone of 25%-35%.

PERSPEKTIF SINGKAT IKLIM DI INDONESIA: PEMODELAN DAN STATUS PERUBAHAN IKLIM.

Dr. Ardhasena Sopaheluwakan

Kepala Bidang Litbang Klimatologi dan Kualitas Udara

Pusat Penelitian dan Pengembangan Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika
(BMKG)

Abstrak: Iklim memiliki peranan penting dalam mendukung perikehidupan di bumi ini. Memiliki pengetahuan mengenai evolusi iklim (lampau dan kini) akan memberikan pemahaman untuk penggunaannya pada sektor yang penting, semisal pertanian dan ketahanan pangan. Sedangkan memiliki kemampuan untuk prediksi iklim yang akan datang, akan memberikan keunggulan untuk perencanaan strategis pembangunan bangsa-bangsa agar perikehidupannya dapat berkelanjutan (*sustainable development*).

Untuk mendapatkan deskripsi yang lengkap atas dinamika iklim di atmosfer, melibatkan pemodelan dengan rentang skala ruang yang sangat besar, melibatkan ukuran dari micrometer (butiran awan) hingga ribuan kilometer (*planetary scale*), yang melingkupi rentang ukuran ruang hingga 10^{14} meter. Pada saat ini pemodelan yang tersedia baru memenuhi sebagian dari skala rentang yang besar tersebut, sehingga tantangan untuk melengkapinya masih terbuka lebar. Presentasi ini akan memberikan beberapa *highlight* mengenai pemodelan iklim, karakter iklim di

SESI PARALEL

KOMBINATORIK

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2017

PENGGUNAAN MATRIKS ANTIADJACENCY DALAM MENCARI LAST COMMON NODE UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH TRAFFIC ASSIGNMENT PROBLEM

RESKIE A. PRATAMA, KEVIN KAMAL, SYAHRIL
RAMADHAN, KIKI A. SUGENG

Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Indonesia,
reskie.audry@sci.ui.ac.id, kevin.kamal@sci.ui.ac.id
syahril.ramadhan@sci.ui.ac.id, kiki@sci.ui.ac.id

Abstrak. Matriks *antiadjacency* (\mathbf{B}) didapatkan dari operasi antara matriks persegi yang semua entrinya bernilai 1 (\mathbf{J}) dengan matriks *adjacency* (\mathbf{A}), yaitu $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{A}$. Makalah ini membahas mengenai penggunaan dari matriks *antiadjacency* dalam mencari *Last Common Node* (LCN). Pencarian LCN dalam makalah ini bertujuan untuk menyelesaikan masalah dalam pengaplikasian teori graf yaitu *Traffic Assignment Problem* (TAP). Pada makalah yang telah diterbitkan, basis dari algoritma LCN adalah matriks *adjacency*. Pada makalah ini dibahas pencarian LCN menggunakan matriks *antiadjacency*. Dengan menggunakan polinomial karakteristik dari matriks *antiadjacency*, didapatkan banyaknya jalan sederhana dari graf G . Untuk penelusuran dalam pencarian LCN dari suatu pasangan *origin-destination* (OD), dilakukan pencarian secara *manual* dengan menuliskan seluruh jalan yang mungkin. Setelah diketahui seluruh jalan yang mungkin, dapat dilihat simpul mana saja yang dilalui oleh jalan-jalan tersebut. Kemudian, dipilih simpul terakhir sesuai urutan topologi sebagai LCN yang akan dicari..

Kata kunci: last common node, matriks *antiadjacency*, polinomial karakteristik, *traffic assignment problem*.

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu topik di bidang matematika yang berkembang pesat dan dapat digunakan untuk menyederhanakan penyelesaian suatu masalah [1]. Teori graf diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler. Dengan menggunakan representasi dalam bentuk graf, suatu permasalahan akan lebih mudah untuk dipahami dan dicari solusi penyelesaiannya. Dalam perkembangannya, teori graf masih perlu banyak diteliti lebih lanjut. Hal ini dikarenakan masih banyak permasalahan dalam teori graf yang perlu dibahas.

Pada umumnya, graf hanya digambar dalam bentuk simpul (*vertex*) dan busur (*edge*). Representasi lain dari graf dapat dibentuk melalui matriks dengan memperhatikan hubungan antar simpul dan busur. Terdapat beberapa representasi matriks yang dapat merepresentasikan graf. Pada makalah ini, yang akan diperhatikan adalah representasi dalam bentuk matriks *adjacency* dan matriks *antiadjacency*. Adapun

hubungan secara umum dari kedua matriks ini yaitu matriks *antiadjacency* (**B**) diperoleh dari $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{A}$, dengan **J** adalah matriks persegi dengan seluruh entrinya bernilai 1.

Penggunaan teori graf untuk menyelesaikan suatu permasalahan sangat banyak aplikasinya, salah satunya yaitu *Traffic Assignment Problem* (TAP). TAP merupakan pembelajaran tentang jaringan lalu lintas, yang berfokus pada pemilihan rute wisatawan dari asal (*origin*) ke tujuan (*destination*). Pada TAP, diasumsikan bahwa semua wisatawan mencoba untuk meminimumkan biaya untuk rute yang dipilih [2]. Banyak algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan TAP, salah satunya yaitu algoritma yang diperkenalkan oleh Bar-Gera yang dikenal dengan algoritma *origin-based*, disebut dengan konsep *Last Common Node* (LCN) ke dalam algoritma dan hanya memperhatikan solusi asiklik.

Pada paper sebelumnya telah diperlihatkan penggunaan dari matriks *adjacency* dalam mencari LCN. Dengan ide dari hubungan antara matriks *adjacency* dan matriks *antiadjacency* yang sudah kami ketahui, pada makalah ini kami akan membahas mengenai matriks *antiadjacency* untuk menyelesaikan pencarian LCN. Pada makalah ini kami akan menggunakan sifat dari polinomial karakteristik dari matriks *antiadjacency* dalam mencari LCN.

2. Definisi dan Notasi

2.1. Teori Graf

Definisi 2.1.1 Suatu graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dengan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan simpul yang tak kosong dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ adalah himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut busur [1]. Banyaknya simpul pada G disebut order dan dinotasikan dengan $|V|$ atau n , dan banyaknya busur disebut size dan dinotasikan dengan $|E|$ [1].

Definisi 2.1.2 Suatu graf berarah $D = (V, A)$ adalah pasangan terurut dari dua himpunan V dan A dengan V adalah himpunan berhingga yang tak kosong dan A merupakan koleksi pasangan terurut anggota dari V yang berbeda. Jika u dan v adalah simpul pada graf berarah D , maka busur berarah uv artinya menghubungkan simpul asal u ke simpul ujung v . [1].

Definisi 2.1.3 Graf berarah asiklik adalah graf berarah yang tidak memuat subgraf berupa siklus berarah. Sementara, graf berarah siklik adalah graf berarah yang memuat subgraf berupa siklus berarah [1].

Definisi 2.1.4 Misalkan u dan v adalah dua simpul di G . Jalan uv (didefinisikan dengan W) di graf G adalah barisan simpul di G yang dimulai dari u dan berakhir di v , sehingga simpul-simpul yang berurutan saling bertetangga [1].

Definisi 2.1.5 Jalan W dapat ditulis sebagai $W := u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$, dengan $k \geq 0$, v_i dan v_{i+1} bertetangga untuk $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Lintasan uv adalah jalan di mana setiap busur hanya dilalui satu kali saja. [1]

Definisi 2.1.6 Misalkan G adalah suatu graf berarah. Barisan simpul dari G

$$W = u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$$

sedemikian sehingga u_i bertetangga ke u_{i+1} untuk semua $i = 0, 1, \dots, k-1$ disebut jalan berarah $u - v$ di G . Jika tidak ada simpul yang berulang pada W , maka W disebut lintasan berarah.

2.2. Matriks Adjacency dan Matriks Antiadjacency

Definisi 2.2.1 Matriks adjacency $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dari suatu graf berarah G adalah suatu matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$, dengan $n = |V|$, yang entrinya merepresentasikan ada tidaknya busur berarah yang menghubungkan dua simpul dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika terdapat busur berarah antara } v_i \text{ ke } v_j, \text{ untuk } i \neq j \\ 0, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ [1].

Definisi 2.2.2 Matriks antiadjacency dari graf berarah G adalah matriks $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{A}$, dengan \mathbf{J} adalah matriks $n \times n$ yang semua entrinya adalah 1 [3].

2.3. Polinomial Karakteristik

Definisi 2.3.1 Misalkan \mathbf{A} adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi persamaan $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, maka skalar λ disebut nilai eigen dan vektor $\mathbf{x}_{n \times 1} \neq 0$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Definisi 2.3.2 Polinomial karakteristik dari matriks \mathbf{A} adalah

$$p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}, \lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n,$$

dengan n adalah derajat tertinggi dari $p(\mathbf{A})$.

Persamaan karakteristik dari matriks \mathbf{A} adalah $p(\mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ [1]

Teorema 2.1.

Misalkan G adalah suatu graf berarah yang asiklik dengan $(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Misalkan \mathbf{B} adalah matriks antiadjacency dari graf berarah G dengan polinomial karakteristiknya adalah

$$(\mathbf{B}(G)) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n.$$

Maka $|b_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$, menyatakan banyaknya lintasan berarah dari graf berarah G dengan panjang $i-1$ [4].

2.4. Jaringan Transportasi

Jaringan transportasi dapat direpresentasikan sebagai graf berarah $G = (V, E)$, di mana setiap simpul akan bersesuaian dengan *intersection*, dan setiap busur berarah bersesuaian dengan ruas jalan dengan suatu arah tertentu [2]. Sebuah busur berarah akan disimbolkan dengan pasangan simpul $(u, v) \in E$, dengan $u, v \in V$ yang menginterpretasikan bahwa dimulai dari u dan menuju ke v .

Representasi matriks *adjacency* \mathbf{A} untuk jaringan transportasi adalah.

$\mathbf{A}_{uv} = 1$ jika $(u, v) \in E$,

$\mathbf{A}_{uv} = 0$ jika tidak ada penghubung langsung (sebuah busur berarah) dari u menuju v .

Selain itu, pada jaringan transportasi berlaku $\mathbf{A}_{uu} = 0$ karena tidak terdapat *self-link*.

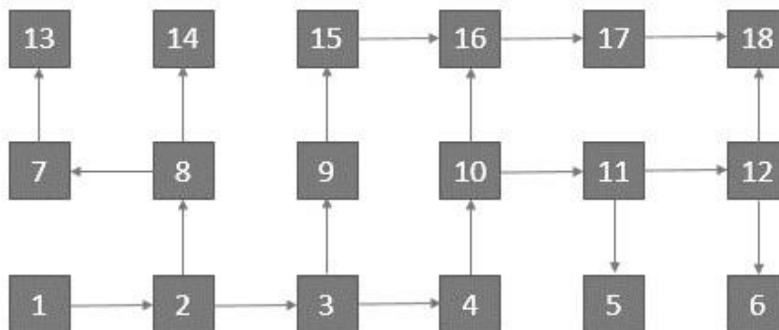
Didefinisikan sebuah lintasan sederhana atau sebuah rute sederhana dari $i \in V$ menuju $j \in V$ sebagai lintasan tanpa pengulangan simpul. Simpul bersama r untuk pasangan OD pq didefinisikan sebagai semua rute sederhana dari titik asal p menuju titik tujuan q yang melalui r , kecuali q .

3. Penggunaan Matriks *Antiadjacency* dalam Mencari LCN

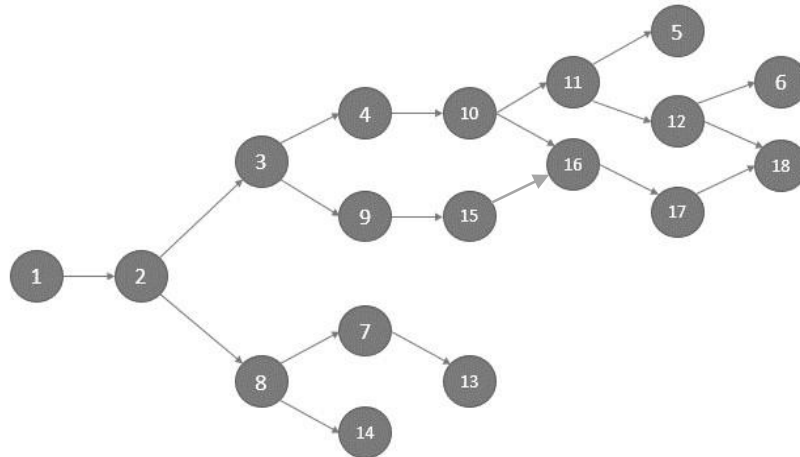
Pada bagian ini, akan dibahas matriks *antiadjacency* \mathbf{B} dari G serta penggunaannya dalam mencari LCN. Pertama akan dicari matriks *antiadjacency* \mathbf{B} , kemudian akan dicari persamaan polinomial karakteristik dari $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$. Setelah dilihat persamaan polinomial karakteristiknya, akan diketahui banyak jalan sederhana dari simpul 1 ke simpul 18 sebagai contoh sederhana dalam makalah ini. Dari jalan sederhana dari simpul 1 ke simpul 18, dapat ditemukan simpul yang sering dilalui dan dari simpul tersebut akan dicari simpul terakhir yang sering dilaluinya (LCN).

3.1. Graf G dan Representasi Matriksnya

Untuk mengetahui sifat dari polinomial karakteristik yang diperoleh dari $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$, akan digunakan graf asiklik berarah G sebagai berikut.



Graf G tersebut dapat dibuat representasi lain sebagai berikut.



Graf diatas dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks *adjacency* \mathbf{A} sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks *adjacency* diatas, dapat diperoleh matriks *antiadjacency* $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{A}$, dimana \mathbf{J} adalah matriks persegi dengan seluruh entrinya bernilai 1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. Polinomial Karakteristik dari Matriks *Antiadjacency* Graf G

Berdasarkan teorema, polinomial karakteristik $\det(\lambda I - B)$ dinyatakan sebagai berikut.

$$\det(\lambda I - B) = \lambda_n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

di mana $|b_i|$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ menyatakan banyaknya jalan pada graf G dengan panjang $i - 1$.

Dari graf G yang diberikan, dapat dibentuk polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \lambda^{18} - 18\lambda^{17} + 19\lambda^{16} - 19\lambda^{15} + 18\lambda^{14} - 14\lambda^{13} + 11\lambda^{12} \\ &\quad - 8\lambda^{11} + 4\lambda^{10} \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema, didapatkan bahwa dalam graf G terdapat:

- 18 jalan dengan panjang 0;
- 19 jalan dengan panjang 1;
- 19 jalan dengan panjang 2;
- 18 jalan dengan panjang 3;
- 14 jalan dengan panjang 4;
- 11 jalan dengan panjang 5;
- 8 jalan dengan panjang 6; dan
- 4 jalan dengan panjang 7.

Karena graf G merupakan graf asiklik berarah, maka setiap jalan dengan panjang terbesar merupakan panjang jalan dari suatu pasangan OD. Pada graf G di atas, panjang jalan terbesar adalah 7. Ini mengartikan bahwa terdapat pasangan OD dengan panjang 7, yang dalam kasus ini adalah pasangan OD (1,6) dan (1,18). Di sini, akan dicari LCN dari pasangan OD (1,18).

3.3 Mencari *Last Common Node* (LCN) berdasarkan Persamaan Polinomial Karakteristik

Dari persamaan polinomial karakteristik yang diperoleh akan dicari LCN dari pasangan OD (1,18) dengan menyelidiki setiap rute yang mungkin.

Dari graf G , dapat dilihat bahwa terdapat tiga jalan sederhana yang dapat ditempuh dari simpul 1 ke simpul 18, antara lain:

- $\{1 - 2 - 3 - 4 - 10 - 11 - 12 - 18\}$;
- $\{1 - 2 - 3 - 4 - 10 - 16 - 17 - 18\}$; dan
- $\{1 - 2 - 3 - 9 - 15 - 16 - 17 - 18\}$;

Dari tiga jalan di atas, terdapat tiga simpul yang selalu dilalui dari simpul 1 ke simpul 18, antara lain simpul 1, simpul 2, dan simpul 3. Dari tiga simpul tersebut, sesuai dengan urutannya pada graf G dapat dilihat bahwa simpul 3 adalah simpul bersama yang terakhir dilalui dalam setiap jalan pada pasangan OD (1,18). Dengan demikian, LCN dari pasangan OD (1,18) adalah simpul 3.

4. Kesimpulan

Dalam makalah ini, telah dikembangkan suatu cara untuk mencari *Last Common Node* (LCN) dari suatu graf asiklik berarah dengan meninjau matriks *antiadjacency* \mathbf{B} dari graf yang bersangkutan. Penggunaan matriks *antiadjacency* di sini adalah untuk mencari persamaan polinomial karakteristik $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$, dengan bentuk $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$ di mana $|b_i|$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah banyaknya jalan sederhana pada graf G dengan panjang $i - 1$.

Adapun langkah-langkah dalam mencari LCN dari suatu pasangan OD dengan menggunakan matriks *antiadjacency* \mathbf{B} dari graf G adalah sebagai berikut.

1. Tentukan matriks *antiadjacency* \mathbf{B} berdasarkan matriks *adjacency* \mathbf{A} , yaitu $\mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{A}$, dimana \mathbf{J} adalah matriks persegi dengan seluruh entri bernilai 1.
2. Tentukan persamaan polinomial karakteristik $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$ untuk mengetahui banyaknya jalan sederhana pada graf G .
3. Untuk mencari LCN dari suatu pasangan OD, perlu diketahui berapa panjang dari pasangan OD tersebut, kemudian dapat dilakukan pencarian secara *manual* dengan menuliskan seluruh jalan yang mungkin.
4. Setelah diketahui seluruh jalan yang mungkin, dapat dilihat simpul mana saja yang dilalui oleh jalan-jalan tersebut. Kemudian, dipilih simpul terakhir seseuai urutan topologi sebagai LCN yang akan dicari.

Penggunaan matriks *antiadjacency* \mathbf{B} , dalam hal ini adalah untuk mencari persamaan polinomial karakteristik saja, sedangkan untuk mencari LCN masih menggunakan cara manual. Saran dari penulis, untuk penelitian lebih lanjut dapat dikembangkan penggunaan matriks \mathbf{B} sehingga lebih memudahkan pencarian LCN tanpa harus dilakukan pencarian secara manual. Selain itu, metode ini disimulasikan dalam contoh graf yang sederhana. Untuk penelitian lebih lanjut, penulis memberi usulan untuk menggunakan kasus riil dalam melakukan simulasi metode ini.

Referensi

- [1] Bapat, R.B., 2010, *Graphs and matrices*, New York (NY): Springer.
- [2] Firmansyah, F., 2014, *Polinomial Karakteristik Matriks Antiadjacency dari Graf Berarah yang Acyclic*, Tesis, Departemen Matematika FMIPA UI.
- [3] Gao, L., Si, B., Yang, X., Sun, H., & Gao, Z., 2012, *A matrix method for finding last common nodes in an origin-based traffic assignment problem. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(1), 285-290.
- [4] Sugeng, K.A., Slamet, S., & Silaban, D.R., 2014, *Teori Graf dan Aplikasinya*. Departemen Matematika FMIPA UI.

HUBUNGAN NILAI EIGEN TERBESAR MATRIKS ANTIADJACENCY DENGAN DERAJAT GRAF SEDERHANA TAK BERARAH

AKANE VIEBIA AYA, NURUL MAGHFIRAH, KIKI ARIYANTI
SUGENG

Departemen Matematika FMIPA, Universitas Indonesia,
akane.viebia@ui.ac.id, nurul.maghfirah@ui.ac.id, kiki@sci.ui.ac.id

Abstrak. Misal $G = (V, E)$ adalah graf sederhana tak berarah dimana V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan busur. Matriks *adjacency* dari graf G adalah matriks $A(G) = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ dimana $a_{ij}=1$ untuk $i \neq j$ jika terdapat busur dari v_i ke v_j , dan $a_{ij}=0$ untuk lainnya. Matriks *antiadjacency* dari graf G didefinisikan sebagai matriks $B(G) = J - A(G)$ dengan J adalah matriks berukuran $n \times n$ yang semua entrinya 1. Pada makalah ini dibahas hubungan antara nilai eigen terbesar dari matriks *antiadjacency* $B(G)$ dengan derajat terbesar dan terkecilnya dari beberapa kelas graf, yaitu : graf bipartit lengkap, graf lengkap, dan graf bintang.

Kata kunci: graf bipartit lengkap, graf lengkap, matriks *antiadjacency*, nilai eigen terbesar.

1. Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang hingga saat ini masih berkembang pesat. Teori graf dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan, mulai dari model permasalahan sehari – hari sampai permasalahan matematika yang rumit seperti pada bidang kimia, ilmu komputer dan riset operasi.

Jenis graf dapat dibagi menjadi dua, yaitu graf berarah dan graf tidak berarah. Suatu graf berarah D memuat himpunan berhingga V dari simpul dan himpunan pasangan terurut dari simpul yang berbeda. Untuk $u, v \in V$ pasangan (u, v) disebut busur dan biasanya dinotasikan dengan uv [6]. Graf tidak berarah $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan busur atau himpunan pasangan tak berurut dari dua simpul yang berbeda di V .

Suatu graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks, contohnya sebagai matriks *adjacency* dan matriks *antiadjacency*. Matriks *adjacency* dari graf G digunakan untuk menyatakan hubungan antar simpul pada suatu graf, dan dinyatakan dalam bentuk matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Contoh lain representasi graf adalah dengan matriks *antiadjacency* yaitu dimisalkan A adalah matriks *adjacency* dari graf G , matriks $B = J - A$ disebut sebagai matriks *antiadjacency* dari suatu graf G dengan J adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang semua entrinya adalah 1 [2].

Jika diketahui representasi suatu graf G dalam bentuk matriks *antiadjacency*, maka dapat dicari nilai karakteristik atau nilai eigen dari matriks *antiadjacency* tersebut. Untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan menggunakan spektrum dari graf.

Misalkan λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dan $m(\lambda)$ adalah multiplisitas aljabar dari nilai eigen. Misalkan $A(G)$ memiliki nilai eigen yang berbeda, yaitu $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ dengan multiplisitas masing – masing adalah $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$. Spektrum dari graf G , dinotasikan dengan $Spec A(G)$, dan dituliskan dalam bentuk sebagai berikut [3].

$$Spec A(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Terdapat berbagai jenis kelas graf, seperti : graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang, graf bipartit, dan sebagainya. Jenis graf berbeda juga pasti akan menghasilkan entri matriks *adjacency* dan matriks *antiadjacency* yang berbeda pula, sehingga nilai eigen yang dihasilkan juga akan berbeda – beda.

Dari beragam perbedaan yang mungkin akan dihasilkan, sebenarnya terdapat suatu keterhubungan. Kaitan nilai eigen terbesar matriks *adjacency* dengan derajat graf G tak berarah telah diketahui yaitu $\delta(G) \leq \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$, dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil dari graf G , $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar dari graf G , dan $\lambda_1(G)$ adalah nilai eigen terbesar dari matriks *adjacency*. [2]. Tetapi belum diketahui bagaimana untuk matriks *antiadjacency* nya.

Hasil yang sudah diketahui adalah spektrum dari beberapa kelas graf seperti berikut [1] :

Theorem 1. Nilai Karakteristik dari matriks *antiadjacency* graf lengkap K_n dengan $n \geq 4$ selalu bernilai 1 dan spektrum dari graf lengkap K_n adalah $Spec K_n = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$.

Theorem 2. Spektrum matriks *antiadjacency* graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ adalah $Spec K_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & m & n \\ m+n-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Theorem 3. Spektrum matriks *antiadjacency* graf bintang S_n dengan $n \geq 3$ adalah $Spec S_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n-1 \\ n-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dikarenakan masih minimnya penelitian mengenai matriks *antiadjacency*, maka pada makalah ini akan dibahas keterhubungan antara nilai eigen dari matriks *antiadjacency* dari suatu graf dengan derajat terkecil dan terbesar dari graf tersebut. Makalah ini menggunakan tiga buah kelas graf, yaitu : graf bipartit lengkap, graf lengkap, dan graf bintang.

Selanjutnya pada bagian II akan dijelaskan mengenai hasil – hasil penelitian dan pada bagian III akan dijelaskan mengenai kesimpulan.

2. Hasil – Hasil Utama

Definisi 1. Graf lengkap adalah graf sederhana dimana setiap pasang simpulnya merupakan simpul-simpul bertetangga [7].

Berdasarkan ide dari [5] maka diperoleh hasil berikut.

Theorem 4. Misal K_n adalah graf lengkap dengan $n \geq 4$ diperoleh $\lambda_1(K_n) < \delta(K_n) = \Delta(K_n)$.

BUKTI Berdasarkan definisi, setiap simpul yang ada saling bertetangga maka derajat setiap simpul dari graf lengkap K_n adalah $n - 1$. Sehingga dapat dikatakan derajat terkecil dan terbesar dari graf K_n adalah $n - 1$. Oleh karena itu akan didapat $\delta(K_n) = \Delta(K_n)$.

Sesuai Teorema 1 dari [1] didapat nilai eigen dari matriks *antiadjacency* graf lengkap dengan $n \geq 4$ adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$

Jadi,

a. $\lambda_1(K_n) < \delta(K_n)$
 Diketahui $\lambda_1(K_n) = 1 < n - 1 = \delta(K_n)$ untuk $n \geq 4$
 Maka $\lambda_1(K_n) < \delta(K_n)$.

b. $\lambda_1(K_n) < \Delta(K_n)$
 Diketahui $\lambda_1(K_n) = 1 < n - 1 = \Delta(K_n)$ untuk $n \geq 4$
 Maka $\lambda_1(K_n) < \Delta(K_n)$.

Didapat $\lambda_1(K_n) < \delta(K_n)$ dan $\lambda_1(K_n) < \Delta(K_n)$ dan $(K_n) = \Delta(K_n)$, maka $\lambda_1(K_n) < \delta(K_n) = \Delta(K_n)$ untuk graf lengkap K_n dengan $n \geq 4$.

Definisi 2. Suatu graf G adalah graf bipartit lengkap jika himpunan simpul V dapat dipartisi menjadi dua sub-himpunan U dan W , disebut himpunan partisi, sedemikian sehingga setiap busur dari G menghubungkan simpul di U dan simpul di W . Atau dengan kata lain, setiap simpul di U bertetangga dengan setiap simpul di W . Jika $|U| = m$ dan $|V| = n$, maka graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$ [4].

Theorem 5. Misal $K_{r,s}$ adalah graf bipartit lengkap dimana $r, s \geq 2$ diperoleh $\delta(K_{r,s}) \leq \Delta(K_{r,s}) = \lambda_1(K_{r,s})$.

BUKTI. Graf Bipartit lengkap $K_{r,s}$ memiliki 2 himpunan simpul X dan Y . Misalkan himpunan simpul X memiliki r simpul dengan masing-masing simpulnya berderajat s dan himpunan simpul Y memiliki s simpul dengan masing-masing simpulnya berderajat r dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{deg}(v_i) = \begin{cases} s, & i = 1, 2, \dots, r, \\ r, & i = r + 1, r + 2, \dots, r + s. \end{cases}$$

Derajat terkecil dan terbesar dari graf bipartit lengkap $K_{r,s}$ adalah $\delta(K_{r,s}) = \min(r, s)$ dan $\Delta(K_{r,s}) = \max(r, s)$. Karena untuk setiap graf berlaku $\delta(G) \leq \Delta(G)$ maka berlaku pula untuk graf bipartit lengkap $\delta(K_{r,s}) \leq \Delta(K_{r,s})$.

Berdasarkan Teorema 2 dari [1], maka didapat nilai eigen dari matriks *antiadjacency* graf bipartit lengkap $K_{r,s}$ adalah $0, r$, dan s .

Oleh karena itu, nilai eigen terbesar matriks *antiadjacency* graf bipartit lengkap $K_{r,s}$ adalah

$$\lambda_1(K_{r,s}) = \begin{cases} r, & r \geq s \\ s, & r < s \end{cases} \text{ atau } \lambda_1(K_{r,s}) = \text{maks}(r, s).$$

Derajat terbesar dari graf bipartit lengkap $K_{r,s}$ adalah $\Delta(K_{r,s}) = \text{maks}(r, s)$. Karena $\lambda_1(K_{r,s}) = \text{maks}(r, s) = \Delta(K_{r,s})$ maka $\lambda_1(K_{r,s}) = \Delta(K_{r,s})$.

Dari persamaan $\delta(K_{r,s}) \leq \Delta(K_{r,s})$ dan $\lambda_1(K_{r,s}) = \Delta(K_{r,s})$ maka $\delta(K_{r,s}) \leq \Delta(K_{r,s}) = \lambda_1(K_{r,s})$ untuk graf bipartit lengkap dimana $r, s \geq 2$.

Definisi 3. Graf bintang, S_n , adalah graf dengan $n + 1$ simpul, memiliki satu simpul pusat v_0 yang terhubung dengan n simpul lainnya.[7].

Theorem 6. Misal S_n adalah graf bintang dengan $n \geq 3$ diperoleh $\delta(S_n) < \lambda_1(S_n) < \Delta(S_n)$.

BUKTI. Berdasarkan Definisi 3, derajat simpul pusat selalu lebih besar daripada simpul daun graf bintang S_n untuk $n \geq 3$. Sehingga derajat terkecil $\delta(S_n) = 1$ dan derajat terbesar $\Delta(S_n) = n$.

Berdasarkan Teorema 3 dari [1] akan didapat nilai eigen dari matriks *antiadjacency* graf bintang S_n tersebut adalah 0, 1, dan $n - 1$.

Nilai eigen dari matriks *antiadjacency* graf bintang S_n tersebut adalah 0, 1, dan $n - 1$. Karena $n - 1 \geq 1 \geq 0$ untuk $n \geq 3$ maka nilai eigen terbesarnya adalah $\lambda_1(S_n) = n - 1$.

Akan dibuktikan :

- a. $\delta(S_n) < \lambda_1(S_n)$.
Diketahui $\delta(S_n) = 1$.
Jadi $\delta(S_n) = 1 < n - 1 = \lambda_1(S_n)$ untuk $n \geq 3$.
Maka $\delta(S_n) < \lambda_1(S_n)$.
- b. $\lambda_1(S_n) < \Delta(S_n)$.
Diketahui $\Delta(S_n) = n$.
Jadi $\lambda_1(S_n) = n - 1 < n = \Delta(S_n)$ untuk $n \geq 3$.
Maka $\lambda_1(S_n) < \Delta(S_n)$.

Jadi $\delta(S_n) < \lambda_1(S_n) < \Delta(S_n)$ untuk graf bintang S_n dengan $n \geq 3$.

3. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, didapatkan kesimpulan sebagai berikut :

1. Pada graf tak berarah G dengan representasi menggunakan matriks *antiadjacency*, didapat keterhubungan antara nilai eigen terbesar dari matriks *antiadjacency* tersebut dengan derajat terkecil dan terbesar dari graf G adalah $\delta(G) \leq \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$.
2. Untuk matriks *antiadjacency* dari graf tidak berarah, didapatkan keterhubungan sebagai berikut

Jenis Graf	Perbandingan Nilai Eigen Terbesar, Derajat Terkecil, dan Derajat Terbesar
Graf lengkap K_n	$\lambda_1(K_n) < \delta(K_n) = \Delta(K_n)$
Graf bipartit lengkap $K_{r,s}$	$\delta(K_{r,s}) \leq \Delta(K_{r,s}) = \lambda_1(K_{r,s})$
Graf bintang S_n	$\delta(S_n) < \lambda_1(S_n) < \Delta(S_n)$

Referensi

- [1] Alyani, F., 2014, *Spektrum Matriks Antiadjacency dari Beberapa Kelas Graf Tak Berarah*, Tesis. Departemen Matematika FMIPA UI.
- [2] Bapat, R.B., 2010, *Graph and Matrices*, Springer.
- [3] Biggs, 1993, *Algebraic Graph Theory*. New York, Cambridge University Press.
- [4] Chartrand, G dan Zhang, 2005, *Introduction to Graph Theory*, New York, McGraw-Hill.
- [5] Listyaningrum, R., 2015, *Kaitan Nilai Eigen Terbesar Matriks Antiadjacency dengan Derajat Graf dan Operasi Maksimum dari Dua Graf*, Tesis. Departemen Matematika FMIPA UI.
- [6] Harary, 1995, *Graph Theory*. New York, Addison – Wesley.
- [7] Sugeng, K.A., dan Slamet, S. dan Silaban, D.R.. 2014. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Depok. Departemen Matematika FMIPA UI

POLINOMIAL KARAKTERISTIK DAN SPEKTRUM Matriks Adjacency dan Anti-Adjacency dari Graf Friendship Tak Berarah dan Berarah

BUDI PONIAM^{1,2}, KIKI A. SUGENG²

1 Departemen Pendidikan Matematika, Fakultas Pendidikan, Universitas Sampoerna,
Gedung L'Avenue (Office) Lantai 5,
Jalan Raya Pasar Minggu Kav 16, Jakarta Selatan 12780,
Budi.poniam@sampoernauniversity.ac.id
2 Program Magister Matematika, Departemen Matematika FMIPA,
Universitas Indonesia, Kampus UI Depok 16424, kiki@sci.ui.ac.id.

Abstrak. Sebuah graf *friendship* (C_3^n), baik tak berarah maupun berarah, dapat direpresentasikan dengan sebuah matriks *adjacency* maupun matriks *anti-adjacency*. Pada makalah ini diberikan polinomial karakteristik dan spektrum matriks *adjacency* dan *anti-adjacency* dari graf *friendship* tak berarah maupun berarah. Graf *friendship* berarah meliputi graf yang siklik dan asiklik. Graf siklik dibahas hanya untuk satu jenis yaitu graf yang semua graf segitiganya (C_3) siklik searah; dan graf asiklik dibahas untuk dua jenis saja. Beberapa kesimpulan yang menarik didapatkan dari hasil perbandingan polinomial karakteristik dan spektrum dari matriks *adjacency* dan matriks *anti-adjacency*.

Kata kunci: Polinomial karakteristik, spektrum, *adjacency*, *anti-adjacency*, graf *friendship*.

1. Pendahuluan

Kajian yang umum dilakukan pada matriks representasi graf adalah penentuan sifat-sifat polinomial karakteristik dan spektrum matriks tersebut. Penelitian mengenai polinomial karakteristik matriks *adjacency* dari suatu graf tidak berarah dilakukan oleh Bapat [3] dan Biggs [4]. Knauer [9] meneliti hubungan nilai-nilai karakteristik matriks *adjacency* dari suatu graf tidak berarah sederhana.

Penelitian mengenai matriks *anti-adjacency* dari suatu graf masih sangat terbatas jumlahnya. Penelitian mengenai polinomial karakteristik matriks *anti-adjacency* dari graf berarah telah dilakukan oleh Bapat [3], graf pohon berarah *out-tree* oleh Nugroho [12], dan graf berarah asiklik oleh Firmansah [7], serta graf berarah oleh Wildan [13]. Adiati [2] meneliti hubungan nilai-nilai karakteristik matriks *anti-adjacency* dari suatu graf berarah sederhana.

Dalam makalah ini penulis menentukan polinomial karakteristik dan spektrum matriks *adjacency* dan *anti-adjacency* dari graf *friendship* tak berarah dan berarah dan mengkaji sifat-sifatnya. Polinomial karakteristik matriks *adjacency* dari graf *friendship* tak berarah sudah dihitung oleh Cvetkovic, Rowlinson dan Simic [6], dan spektrum matriks *adjacency*nya oleh Abdollahi, Janbaz dan Oboudi [1] namun

pembahasan tidak terkait dengan sifat-sifatnya.

Graf *friendship* berarah siklik yang dibahas dalam makalah ini dibatasi hanya graf *friendship* yang setiap graf segitiganya C_3 berarah siklik dan mempunyai arah yang sama. Graf *friendship* berarah asiklik dibatasi hanya dua jenis yaitu graf *friendship* berarah asiklik (1) dan (2).

2. Hasil – Hasil Utama

Teorema 2.1. [8] Misalkan sebuah matriks $A_{n \times n} = (a_{ij})$, berukuran $n \times n$, dengan $n \geq 1$. a_{1j} adalah entri baris pertama dan kolom ke j dari matriks A dan A_{1j} adalah submatriks berukuran $(n - 1) \times (n - 1)$ yang dibentuk dengan menghapuskan baris pertama dan kolom ke j dari matriks A . Maka determinan matriks A ($|A|$) dapat dihitung melalui persamaan $|A| = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} |A_{1j}|$.

Teorema 2.2. [8] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar blok segitiga yaitu

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & A_2 & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_p \end{bmatrix}$$

dengan submatriks $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$ merupakan matriks bujur sangkar maka $|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \dots |A_p|$.

Untuk mencari polinomial karakteristik dari graf *friendship* berarah siklik dan asiklik, maka diperlukan matriks khusus yang didefinisikan berikut ini.

Definisi 2.3. Ambil sebuah matriks bujur sangkar $P = (p_{ij})$ berukuran $(2n + 1) \times (2n + 1)$; dengan $n \geq 1$, yang setiap entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$p_{ij} = \begin{cases} a, & \text{untuk } i = j \\ b, & \text{untuk } i = \{2, 4, 6, \dots, 2n\} \text{ dan } j = i + 1 \\ c, & \text{untuk } i = \{3, 5, 7, \dots, 2n + 1\} \text{ dan } j = i - 1 \\ e, & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } j = \{2, 4, 6, \dots, 2n\} \\ f, & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } j = \{3, 5, 7, \dots, 2n + 1\} \\ g, & \text{untuk } i = \{2, 4, 6, \dots, 2n\} \text{ dan } j = 1 \\ h, & \text{untuk } i = \{3, 5, 7, \dots, 2n + 1\} \text{ dan } j = 1 \\ d, & \text{untuk entri lainnya.} \end{cases}$$

Jadi matriks P dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdot & 2n & 2n + 1 \end{matrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & e & f & \cdot & e & f & e & f & \cdot & e & f \\ g & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \cdot & d & d & d & d & \cdot & d & d \\ h & \mathbf{c} & \mathbf{a} & \cdot & d & d & d & d & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g & d & d & \cdot & \mathbf{a} & \mathbf{b} & d & d & \cdot & d & d \\ h & d & d & \cdot & \mathbf{c} & \mathbf{a} & d & d & \cdot & d & d \\ g & d & d & \cdot & d & d & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \cdot & d & d \\ h & d & d & \cdot & d & d & \mathbf{c} & \mathbf{a} & \cdot & d & d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g & d & d & \cdot & d & d & d & d & \cdot & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ h & d & d & \cdot & d & d & d & d & \cdot & \mathbf{c} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \cdot \\ 2n \\ 2n+1 \end{matrix}$$

dengan $n \geq 1$; $n \in \mathbb{N}$ dan $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.4. Misalkan P adalah sebuah matriks yang didefinisikan seperti pada Definisi 2.3. maka $p_{1(2l)} \cdot (-1)^{1+2l} |P_{1(2l)}| = -e \cdot |P_{12}|$, untuk $l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; dengan P_{1j} adalah submatriks berukuran $2n \times 2n$ yang dibentuk dengan menghapuskan baris pertama dan kolom ke j dari matriks P .

BUKTI. Lemma 2.4. dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$p_{12} \cdot (-1)^{1+2} |P_{12}| = p_{14} \cdot (-1)^{1+4} |P_{14}| = \dots = p_{1(2n)} \cdot (-1)^{1+2n} |P_{1(2n)}| = -e \cdot |P_{12}|.$$

Sesuai dengan definisi matriks P , didapatkan

$$p_{12} \cdot (-1)^{1+2} = p_{14} \cdot (-1)^{1+4} = \dots = p_{1(2n)} \cdot (-1)^{1+2n} = -e \quad \text{atau} \\ p_{1(2l)} \cdot (-1)^{1+2l} = -e, \text{ untuk } l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Untuk $l = 1$, terbukti dengan jelas $p_{12} \cdot (-1)^{1+2} |P_{12}| = -e \cdot |P_{12}|$.

Untuk $l = 2$, perlu dibuktikan bahwa $|P_{14}| = |P_{12}|$.

Menurut Franklin [8], jika α_i adalah vektor baris ke- i dan β_j adalah vektor kolom ke- j , operasi pertukaran baris dan pertukaran kolom dapat dilakukan pada suatu matriks yaitu vektor baris ke- r dengan vektor baris ke- s saling tukar ($\alpha_r \leftrightarrow \alpha_s$) dan vektor kolom ke- r dengan vektor kolom ke- s saling tukar ($\beta_r \leftrightarrow \beta_s$). Untuk setiap pertukaran vektor baris atau kolom, determinan matriks akan berubah tanda (negatif menjadi positif dan sebaliknya). Selain pertukaran baris dan kolom, dalam perhitungan determinan matriks dikenal juga operasi baris $\alpha_r^* = \alpha_r + t\alpha_s$ dan operasi kolom $\beta_r^* = \beta_r + t\beta_s$ dengan $t \in \mathbb{R}$ dan tanda * menyatakan vektor baris atau kolom yang baru, hasil operasi baris atau kolom. Operasi baris atau kolom ini tidak mengubah determinan suatu matriks.

Dalam pembuktian ini, operasi pertukaran baris pada submatriks P_{14} akan dilakukan yaitu ($\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4$) & ($\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3$), kemudian pertukaran kolom ($\beta_2 \leftrightarrow \beta_3$) lalu ($\beta_2 \leftrightarrow \beta_4$) sehingga didapatkan submatriks P_{12} . Terbukti $|P_{14}| = |P_{12}|$.

Untuk $2 < l \leq n$, akan dibuktikan $|P_{1(2(l+1))}| = |P_{1(2l)}|$. Operasi pertukaran baris pada submatriks $P_{1(2(l+1))}$ akan dilakukan yaitu ($\alpha_{2l-1} \leftrightarrow \alpha_{2l+1}$) dan ($\alpha_{2l} \leftrightarrow \alpha_{2l+2}$), kemudian pertukaran kolom ($\beta_{2l} \leftrightarrow \beta_{2l+1}$) lalu ($\beta_{2l} \leftrightarrow \beta_{2l+2}$) sehingga didapatkan submatriks $P_{1(2l)}$. Terbukti $|P_{1(2(l+1))}| = |P_{1(2l)}|$. Karena $p_{14} \cdot (-1)^{1+4} |P_{14}| = -e \cdot |P_{12}|$, maka didapatkan $p_{1(2n)} \cdot (-1)^{1+2n} |P_{1(2n)}| = \dots = p_{16} \cdot (-1)^{1+6} |P_{16}| = p_{14} \cdot (-1)^{1+4} |P_{14}| = -e \cdot |P_{12}|$.

Jadi $p_{1(2l)} \cdot (-1)^{1+2l} |P_{1(2l)}| = -e \cdot |P_{12}|$, untuk $l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. ■

Lemma 2.5. Misalkan P adalah sebuah matriks yang didefinisikan seperti pada Definisi 2.3. maka $p_{1(2l+1)} \cdot (-1)^{1+2l+1} |P_{1(2l+1)}| = f \cdot |P_{13}|$, untuk $l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$; dengan P_{1j} adalah submatriks berukuran $2n \times 2n$ yang dibentuk dengan menghapuskan baris pertama dan kolom ke j dari matriks P .

BUKTI. Lemma 2.6. dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$p_{13} \cdot (-1)^{1+3} |P_{13}| = p_{15} \cdot (-1)^{1+5} |P_{15}| = \dots = p_{1(2n+1)} \cdot (-1)^{1+2n+1} |P_{1(2n+1)}| = f \cdot |P_{13}|.$$

Sesuai dengan definisi matriks P , kita dapatkan

$$p_{13} \cdot (-1)^{1+3} = p_{15} \cdot (-1)^{1+5} = \dots = p_{1(2n+1)} \cdot (-1)^{1+2n+1} = f \text{ atau}$$

$$p_{1(2l+1)} \cdot (-1)^{1+2l+1} = f, \text{ untuk } l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Dengan cara pembuktian yang sama dengan cara pembuktian pada Lemma 2.5., didapatkan $|P_{1(2n+1)}| = \dots = |P_{17}| = |P_{15}| = |P_{13}|$ sehingga didapatkan

$$p_{1(2l+1)} \cdot (-1)^{1+2l+1} |P_{1(2l+1)}| = f \cdot |P_{13}|, \text{ untuk } l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}. \blacksquare$$

Teorema 2.6. Misalkan P adalah sebuah matriks seperti yang didefinisikan seperti pada Definisi 2.3., maka $|P| = a \cdot |P_{11}| - n \cdot e \cdot |P_{12}| + n \cdot f \cdot |P_{13}|$; dengan P_{1j} adalah submatriks berukuran $2n \times 2n$ yang dibentuk dengan menghapuskan baris pertama dan kolom ke j dari matriks P .

BUKTI. Berdasarkan Teorema 2.1. $|P| = \sum_{j=1}^{2n+1} p_{1j} \cdot (-1)^{1+j} |P_{1j}|$; dengan P_{1j} adalah submatriks berukuran $2n \times 2n$ yang dibentuk dengan menghapuskan baris pertama dan kolom ke j dari matriks P , didapatkan $|P| = a \cdot |P_{11}| + \sum_{l=1}^n p_{1(2l)} \cdot (-1)^{1+2l} |P_{1(2l)}| + \sum_{l=1}^n p_{1(2l+1)} \cdot (-1)^{1+2l+1} |P_{1(2l+1)}|$.

Berdasarkan Lemma 2.5. dan 2.6., maka didapatkan

$$\begin{aligned} |P| &= a \cdot P_{11} + \sum_{l=1}^n (-e \cdot |P_{12}|) + \sum_{l=1}^n (f \cdot |P_{13}|) \\ |P| &= a \cdot |P_{11}| - n \cdot e \cdot |P_{12}| + n \cdot f \cdot |P_{13}|. \blacksquare \end{aligned}$$

Definisi 2.7. [8] Ambil suatu matriks A berukuran $n \times n$ yang memenuhi persamaan matriks $Ax = \lambda x$, dengan skalar λ yang disebut nilai karakteristik, dan vektor $x \neq 0$ berukuran $n \times 1$ disebut vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristik λ . Polinomial karakteristik matriks A berukuran $n \times n$ adalah $P(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ dengan n adalah derajat tertinggi dari $P(A)$.

Definisi 2.8. [11] Submatriks utama dari matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ didefinisikan sebagai suatu submatriks berukuran $(n - k) \times (n - k)$ yang diperoleh dengan menghapus secara bersamaan k buah baris dan k buah kolom yang berindeks sama dari matriks A . Minor utama dari matriks A didefinisikan sebagai determinan submatriks utama dari matriks A .

Teorema 2.9. [11] Jika $\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0$ adalah persamaan karakteristik untuk matriks A berukuran $n \times n$ maka

$$c_i = (-1)^i \sum_{j=1}^w |A_i^{(j)}| \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

dengan $|A_i^{(j)}|$ adalah minor utama berukuran $i \times i$ dari matriks A dan $j = 1, 2, \dots, w$ dengan w adalah banyaknya minor utama yang berukuran $i \times i$ dari matriks A .

Definisi 2.10. [3] Jika $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul pada graf G maka matriks **adjacency** $A(G) = [a_{ij}]$ dari **graf berarah** G adalah matriks $n \times n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i \neq j \text{ jika terdapat busur berarah dari } v_i \text{ ke } v_j \\ 0. & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Definisi tersebut juga berlaku untuk graf **tak berarah** G dengan $a_{ij} = 1$ jika untuk $i \neq j$ terdapat busur yang menghubungkan v_i dan v_j .

Teorema 2.11. [3,4] Misalkan G adalah sebuah graf tidak berarah yang memiliki simpul sebanyak n dan busur sebanyak m dengan polinomial karakteristik $P(A(G)) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$, dan $A(G)$ adalah matriks **adjacency** dari graf G , maka koefisien $a_1 = 0$, $a_2 = -m$ dan a_3 menyatakan negatif dari dua kali banyaknya graf segitiga (graf yang terdiri dari tiga simpul yang saling terhubung).

Definisi 2.12. [3] Matriks **anti-adjacency** dari suatu graf G adalah matriks $B(G) = J - A(G)$ dengan J adalah matriks berukuran sama dengan matriks $A(G)$, yang semua entrinya adalah 1 dan matriks $A(G)$ adalah matriks adjacency dari graf G .

Teorema 2.13 [13] Misalkan G adalah graf berarah yang memiliki n simpul dan m busur, dan $B(G)$ adalah matriks **anti-adjacency** dari G dengan polinomial karakteristiknya adalah $P(B(G)) = \det(\lambda I - B(G)) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$, maka $b_1 = -n$, $b_2 = m$ dan b_3 menunjukkan negatif dari banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul ditambah dua kali banyaknya lingkaran pada G . Lintasan Hamilton adalah sebuah lintasan yang melalui semua simpul yang ada pada suatu graf tepat satu kali.

Definisi 2.14. [3,4] Spektrum matriks $A_{n \times n}$ didefinisikan sebagai $Spec(A) = \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_s) \end{array} \right)$ dengan nilai karakteristik matriks A , $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ dan multiplisitas masing-masing $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$. Nilai karakteristik matriks $A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ merupakan akar-akar yang didapatkan dari persamaan karakteristik $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = 0$.

Teorema 2.15. [9] Misalkan G adalah suatu graf tak berarah sederhana yang memiliki n simpul dan m busur, dan A adalah matriks **adjacency** dari graf G serta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai karakteristik dari matriks A , maka $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ dan $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$.

Teorema 2.16. [2] Misalkan G adalah suatu graf berarah asiklik maupun siklik yang memiliki n simpul dan m busur, dan B adalah matriks **anti-adjacency** dari graf G serta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai karakteristik dari matriks B , maka $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$ dan $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = n^2 - 2m$.

Definisi 2.17. [10] Graf friendship (biasanya ditulis C_3^n) adalah suatu graf yang dihasilkan dengan menggabungkan sejumlah n buah graf segitiga C_3 dengan satu

simpul yang sama. Graf segitiga C_3 merupakan graf yang memiliki tiga simpul yang saling bertetangga.

Definisi 2.18. [5] Suatu graf berarah (directed graph/digraph) adalah graf yang busur-busurnya berarah, sedangkan graf tak berarah adalah graf yang busurnya tak berarah yaitu busurnya hanya menghubungkan dua simpul tanpa ada perbedaan antara simpul asal dan simpul akhir. Graf berarah asiklik adalah graf berarah yang tidak memuat subgraf berupa siklus berarah. Graf berarah siklik adalah graf yang memuat subgraf berupa siklus berarah.

Dalam makalah ini, pembahasan hanya terbatas pada graf *friendship* yang ditunjukkan pada Tabel 1. Pada Tabel 1 juga ditunjukkan matriks *adjacency* dari graf *friendship* yang terkait.

Tabel 1. Gambar graf *friendship* (C_3^n) dan matriks *adjacency* yang terkait.

	C_3^n	Matriks <i>Adjacency</i> (A)
1. Tak berarah		$A_{\text{tak}}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in \mathbb{N}$.</p>
2. Berarah siklik		$A_{\text{siklik}}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in \mathbb{N}$.</p>
3. Berarah asiklik (1)		$A_{\text{asiklik}}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in \mathbb{N}$.</p>
4. Berarah asiklik (2)		$A_{\text{asiklik}}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in \mathbb{N}$.</p>

Teorema 2.19. Suatu graf friendship (C_3^n) tak berarah dengan matriks adjacency (A_{Ftb}^n) memiliki polinomial karakteristik $P(A_{Ftb}^n) = (\lambda^2 - 1)^{n-1} (\lambda^3 - (2n+1)\lambda - 2n)$, dan $Spec(A_{Ftb}^n) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+8n}) & 1 & -1 \\ 1 & n-1 & n \end{array} \right)$, dengan λ adalah nilai karakteristik matriks A_{Ftb}^n .

BUKTI. Polinomial karakteristik matriks adjacency (A_{Ftb}^n) dari suatu graf friendship (C_3^n) tak berarah didapatkan dengan menjabarkan $\det(\lambda I - A_{Ftb}^n)$; dengan λ adalah nilai karakteristik matriks adjacency (A_{Ftb}^n) dan I adalah matriks identitas. Sebut $C = \lambda I - A_{Ftb}^n$. Berdasarkan Teorema 2.6., dapat dihitung

$$\begin{aligned} P(A_{Ftb}^n) &= |C| = \lambda |C_{11}| - n(-1) |C_{12}| + n(-1) |C_{13}| \\ &= \lambda |C_{11}| + n(|C_{12}| - |C_{13}|) \end{aligned} \quad (1)$$

dengan C_{1j} adalah submatriks yang dibentuk dengan menghapuskan baris pertama dan kolom ke j dari matriks C . Berdasarkan Teorema 2.2., didapatkan

$$|C_{11}| = (\lambda^2 - 1)^{\frac{2n}{2}} = (\lambda^2 - 1)^n, \quad (2)$$

$$|C_{12}| = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{\frac{2n-2}{2}} = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}, \quad (3)$$

$$|C_{13}| = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{\frac{2n-2}{2}} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}. \quad (4)$$

Persamaan (2), (3), dan (4) disubstitusikan ke persamaan (1), sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} P(A_{Ftb}^n) &= |C| = \lambda |C_{11}| + n(|C_{12}| - |C_{13}|) \\ &= \lambda (\lambda^2 - 1)^n + n(-(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1} - (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1)^{n-1}) \\ &= (\lambda^2 - 1)^{n-1} (\lambda^3 - (2n+1)\lambda - 2n). \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik pada persamaan (5) yaitu $P(A_{Ftb}^n) = (\lambda^2 - 1)^{n-1} (\lambda^3 - (2n+1)\lambda - 2n) = 0$ didapatkan $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+8n})$ dengan $m(\lambda_1) = 1$, $\lambda_2 = 1$ dengan $m(\lambda_2) = n-1$, $\lambda_3 = -1$ dengan $m(\lambda_3) = n$, dan $\lambda_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+8n})$ dengan $m(\lambda_4) = 1$. ■

Teorema 2.19. sesuai dengan Teorema 2.11., $P(A_{Ftb}^n) = \lambda^{2n+1} - 3n\lambda^{2n-1} - 2n\lambda^{2n-2} + \dots$. Koefisien λ^{2n} yaitu $a_1 = 0$, koefisien λ^{2n-1} yaitu $a_2 = -3n$ (negatif dari banyak busur) dan koefisien λ^{2n-2} yaitu $a_3 = -2n$ (negatif dari dua kali banyaknya graf segitiga (C_3^n)). Demikian juga untuk spektrumnya sesuai dengan Teorema 2.15. yaitu

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_i = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+8n}) + n \times (-1) + (n-1) \times 1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+8n}) = 0 \quad \text{dan}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_i^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+8n}) \right)^2 + n + (n-1) + \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+8n}) \right)^2 = 2 \times 3n = 2m,$$

dengan m menyatakan banyaknya busur, yaitu sebesar $3n$.

Teorema 2.20. Suatu graf friendship (C_3^n) berarah siklik seperti yang ditunjukkan di Tabel 1. dengan matriks adjacency (A_{FS}^n) memiliki polinomial karakteristik $P(A_{FS}^n) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda^3 - n)$, dan $Spec(A_{FS}^n) = \left(\begin{array}{cc} \sqrt[3]{n} & 0 \\ 3 & 2n-2 \end{array} \right)$, dengan λ adalah nilai karakteristik matriks A_{FS}^n .

BUKTI. Sebut $F = (\lambda I - A_{FS}^n)$. Berdasarkan Teorema 2.6., dapat dihitung

$$\begin{aligned}
P(A_{F_S}^n) &= |\lambda I - A_{F_S}^n| = |F| = \lambda |F_{11}| - n \cdot (-1)|F_{12}| + n \cdot (0)|F_{13}| \\
&= \lambda |F_{11}| + n |F_{12}|.
\end{aligned} \tag{6}$$

Berdasarkan Teorema 2.2., didapatkan

$$|F_{11}| = \lambda^{2n}, \tag{7}$$

$$|F_{12}| = (-1)(\lambda^2)^{\frac{2n-2}{2}} = -\lambda^{2(n-1)}. \tag{8}$$

Substitusikan persamaan (7) dan (8) ke dalam persamaan (6) maka didapatkan $P(A_{F_S}^n) = |F| = \lambda^{2n+1} + n(-\lambda^{2(n-1)}) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda^3 - n)$. $\tag{9}$

Dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik pada persamaan (9) yaitu $P(A_{F_S}^n) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda^3 - n) = 0$ didapatkan $\lambda_1 = \sqrt[3]{n}$ dengan $m(\lambda_1) = 3$, $\lambda_2 = 0$ dengan $m(\lambda_2) = 2n - 2$. ■

Teorema 2.20. sesuai dengan Teorema 2.9., $P(A_{F_S}^n) = \lambda^{2n+1} - n \lambda^{2n-2}$. Karena setiap entri diagonal matriksnya sama dengan nol maka koefisien λ^{2n} yaitu $a_1 = 0$. Demikian juga semua minor utama berukuran 2×2 sama dengan nol maka koefisien λ^{2n-1} yaitu $a_2 = 0$. Karena ada sebanyak n minor utama berukuran 3×3 yaitu $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (satu graf C_3 siklik) maka koefisien λ^{2n-2} yaitu $a_3 = -n$ (banyaknya graf C_3 siklik). Untuk koefisien dari suku berikutnya sama dengan nol karena semua minor utama yang berukuran lebih besar dari 3×3 sama dengan nol.

Teorema 2.21. Suatu graf friendship (C_3^n) berarah asiklik (1) seperti yang ditunjukkan di Tabel 1. dengan matriks adjacency ($A_{F_{a1}}^n$) memiliki polinomial karakteristik $P(A_{F_{a1}}^n) = \lambda^{2n+1}$ dan $Spec(A_{F_{a1}}^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$, dengan λ adalah nilai karakteristik matriks $A_{F_{a1}}^n$.

BUKTI. Berdasarkan Teorema 2.2., dapat dihitung

$$P(A_{F_{a1}}^n) = |\lambda I - A_{F_{a1}}^n| = \lambda^{2n+1}. \tag{10}$$

Dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik pada persamaan (10) yaitu $P(A_{F_{a1}}^n) = \lambda^{2n+1} = 0$ didapatkan $\lambda_1 = 0$ dengan $m(\lambda_1) = 2n + 1$. ■

Teorema 2.22. Suatu graf friendship (C_3^n) berarah asiklik (2) seperti yang ditunjukkan di Tabel 1. dengan matriks adjacency ($A_{F_{a2}}^n$) memiliki polinomial karakteristik $P(A_{F_{a2}}^n) = \lambda^{2n+1}$ dan $Spec(A_{F_{a2}}^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$, dengan λ adalah nilai karakteristik matriks $A_{F_{a2}}^n$.

BUKTI. Sebut $H = (\lambda I - A_{F_{a2}}^n)$. Berdasarkan Teorema 2.6., dapat dihitung

$$\begin{aligned}
P(A_{F_{a2}}^n) &= |\lambda I - A_{F_{a2}}^n| = |H| = \lambda |H_{11}| - n(-1)|H_{12}| + n(0)|H_{13}| \\
&= \lambda |H_{11}| + n |H_{12}|.
\end{aligned} \tag{11}$$

Berdasarkan Teorema 2.1. dan Teorema 2.2., didapatkan

$$|H_{11}| = \lambda^{2n}, \tag{12}$$

$$|H_{12}| = 0. \tag{13}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (12) dan (13) ke dalam persamaan (11) maka didapatkan

$$P(A_{F_{a2}}^n) = |H| = \lambda^{2n+1}. \tag{14}$$

Dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik pada persamaan (14) yaitu $P(A_{F_{a2}}^n) = \lambda^{2n+1} = 0$ didapatkan $\lambda_1 = 0$ dengan $m(\lambda_1) = 2n + 1$. ■

Teorema 2.21. dan 2.22. sesuai dengan Teorema 2.9, $P(A_{Fa1}^n) = P(A_{Fa2}^n) = \lambda^{2n+1}$. Semua koefisien selain a_0 sama dengan nol karena semua minor utamanya sama dengan nol.

Matriks *anti-adjacency* dari graf *friendship* yang terkait dengan pembahasan dalam makalah ini ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Gambar graf *friendship* (C_3^n) dan matriks *anti-adjacency* terkait.

	C_3^n	Matriks Antiadjacency (B)
1. Tak berarah		$B_{Fa}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in N$.</p>
2. Berarah siklik		$B_{Fa}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in N$.</p>
3. Berarah asiklik (1)		$B_{Fa}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in N$.</p>
4. Berarah asiklik (2)		$B_{Fa}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 2n & 2n+1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>dengan $n \geq 1; n \in N$.</p>

Teorema 2.23. Suatu graf *friendship* (C_3^n) tak berarah dengan matriks *anti-adjacency* (B_{Ftb}^n) memiliki polinomial $P(B_{Ftb}^n) = (\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + (4n - 1)\lambda - (2n - 1))$, dan $Spec(B_{Ftb}^n) = \begin{pmatrix} 2n-1 & 1 & -1 \\ 1 & n+1 & n-1 \end{pmatrix}$, dengan λ adalah nilai karakteristik matriks B_{Ftb}^n .

BUKTI. Sebut $D = \lambda I - B_{Ftb}^n$. Berdasarkan Teorema 2.1., didapatkan

$$P(B_{Ftb}^n) = |\lambda I - B_{Ftb}^n| = |D| = (\lambda - 1)|D_{11}|. \quad (15)$$

Secara berurutan lakukan operasi matriks pada matriks D_{11} yaitu: operasi baris $\alpha_i^* = -\alpha_1 + \alpha_i$ untuk $i = 2, 3, 4, \dots, 2n$; lalu $\alpha_i^* = -\frac{1}{\lambda}\alpha_{(i+1)} + \alpha_i$ untuk $i = 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$; kemudian operasi kolom $\beta_j^* = -\beta_{2n} + \beta_j$ dilakukan dengan $j = 3, 4, \dots, 2n - 1$ sehingga didapatkan

$$|D_{11}| = (\lambda - 1)^2((\lambda - 1)(\lambda + 1))^{\frac{2n-2}{2}} + (-1)^{1+2n}(-1) |(D_{11})^*_{1(2n)}|, \quad (16)$$

dengan $(D_{11})^*$ adalah matriks hasil akhir operasi baris dan kolom di atas. Operasi kolom secara berurutan dilakukan pada matriks $(D_{11})^*_{1(2n)}$ yaitu: $\beta_2^* = \beta_1 + \beta_2$,

lalu $\beta_3^* = \beta_2 + \beta_3$; kemudian $\beta_4^* = \beta_3 + \beta_4$; dan seterusnya hingga $\beta_{2n-1}^* = \beta_{2n-2} + \beta_{2n-1}$. Berdasarkan Teorema 2.2., didapatkan

$$\begin{aligned} |(D_{11})^*_{1(2n)}| &= -(\lambda - 1)((\lambda - 1)(\lambda + 1))^{\frac{(2n-1)-1}{2}} 2(n - 1). \\ &= -2(n - 1)(\lambda - 1)^n(\lambda + 1)^{n-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (17) ke persamaan (16), lalu persamaan (16) ke persamaan (15), didapatkan

$$\begin{aligned} P(B_{Ftb}^n) &= |\lambda I - B_{Ftb}^n| = (\lambda - 1)|D_{11}| \\ &= (\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + (4n - 1)\lambda - (2n - 1)). \end{aligned} \quad (18)$$

Dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik pada persamaan (18) yaitu $P(B_{Ftb}^n) = (\lambda^2 - 1)^{n-1}(\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + (4n - 1)\lambda - (2n - 1)) = 0$ didapatkan $\lambda_1 = 2n - 1$ dengan $m(\lambda_1) = 1$, $\lambda_2 = 1$ dengan $m(\lambda_2) = n + 1$, $\lambda_3 = -1$ dengan $m(\lambda_3) = n - 1$. ■

Teorema 2.23. sesuai dengan Teorema 2.13., $P(B_{Ftb}^n) = \lambda^{2n+1} - (2n + 1)\lambda^{2n} + 3n\lambda^{2n-1} + (2n^2 - 3n)\lambda^{2n-2} + \dots$. Karena setiap entri diagonal matriksnya sama dengan 1 maka koefisien λ^{2n} yaitu $a_1 = -(2n + 1)$ (negatif dari banyaknya simpul). Karena ada sebanyak $3n$ minor utama berukuran 2×2 yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (satu busur) maka koefisien λ^{2n-1} yaitu $a_2 = 3n$ (banyaknya busur). Demikian juga untuk spektrumnya sesuai dengan Teorema 2.16. yaitu $\sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_i = (n - 1) \times (-1) + (n + 1) \times 1 + 1 \times (2n - 1) = 2n + 1$ (banyaknya simpul) dan $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = (n - 1) \times (-1)^2 + (n + 1) \times 1^2 + (2n - 1)^2 = (2n + 1)^2 - 2(3n)$.

Walaupun Teorema 2.13. dan 2.16. sebenarnya berlaku untuk graf berarah, ternyata ada kecocokan untuk graf *friendship* tak berarah karena koefisien tiga suku pertama polinomial karakteristiknya sama dengan koefisien tiga suku pertama pada graf *friendship* berarah siklik maupun asiklik.

Teorema 2.24. Suatu graf *friendship* (C_3^n) berarah siklik seperti yang ditunjukkan di Tabel 2. dengan matriks anti-adjacency (B_{FS}^n) memiliki polinomial karakteristik $P(B_{FS}^n) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + 3n\lambda - n^2 - n)$, dan $\text{Spec}(B_{FS}^n) = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ 0)$, λ_1 dan $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ untuk $n \geq 2$; dengan λ adalah nilai karakteristik matriks B_{FS}^n .

BUKTI. Misalkan matriks $(\lambda I - B_{FS}^n)$ disebut matriks G . Berdasarkan Teorema 2.6., dapat dihitung

$$\begin{aligned} |G| &= (\lambda - 1) |G_{11}| - n \cdot (0) |G_{12}| + n \cdot (-1) |G_{13}|. \\ &= (\lambda - 1) |G_{11}| - n |G_{13}|. \end{aligned} \quad (19)$$

Dalam perhitungan $|G_{11}|$, beberapa operasi matriks dilakukan secara berurutan yaitu operasi baris $\alpha_i^* = -\alpha_1 + \alpha_i$ untuk $i = 2, 3, 4, \dots, 2n$; lalu operasi kolom $\beta_j^* =$

$-\beta_{2n} + \beta_j$ untuk $j = 3, 4, \dots, 2n - 1$; kemudian dengan menggunakan Teorema 2.1. didapatkan hasil

$$\begin{aligned} |G_{11}| &= (\lambda - 1)^2 (\lambda^2)^{\frac{2n-2}{2}} + (-1)^{1+2n} \cdot (-1) \left| (G_{11})^*_{1(2n)} \right| \\ &= (\lambda - 1)^2 \lambda^{2(n-1)} + \left| (G_{11})^*_{1(2n)} \right|. \end{aligned} \quad (20)$$

Dalam perhitungan $\left| (G_{11})^*_{1(2n)} \right|$, beberapa operasi matriks dilakukan secara berurutan yaitu operasi baris $\alpha_i^* = \frac{-1}{\lambda} \alpha_{i+1} + \alpha_i$ untuk $i = 2, 4, \dots, 2n - 2$, lalu operasi kolom $\beta_2^* = \frac{\lambda-1}{\lambda} \beta_1 + \beta_2$, $\beta_3^* = \frac{\lambda}{\lambda-1} \beta_2 + \beta_3$, $\beta_4^* = \frac{\lambda-1}{\lambda} \beta_3 + \beta_4$, $\beta_5^* = \frac{\lambda}{\lambda-1} \beta_4 + \beta_5$; dan seterusnya hingga $\beta_{2n-1}^* = \frac{\lambda}{\lambda-1} \beta_{2n-2} + \beta_{2n-1}$. kemudian dengan menggunakan Teorema 2.2. didapat hasil

$$\begin{aligned} \left| (G_{11})^*_{1(2n)} \right| &= -\lambda (\lambda^2)^{\frac{2n-1-3}{2}} (n-1) \lambda (2\lambda - 1). \\ &= -(n-1) (2\lambda - 1) \lambda^{2(n-1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Persamaan (21) disubstitusikan ke persamaan (20) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} |G_{11}| &= (\lambda - 1)^2 \lambda^{2(n-1)} + \left| (G_{11})^*_{1(2n)} \right| \\ &= (\lambda - 1)^2 \lambda^{2(n-1)} - (n-1) (2\lambda - 1) \lambda^{2(n-1)} \\ &= \lambda^{2(n-1)} ((\lambda - 1)^2 - (n-1) (2\lambda - 1)). \end{aligned} \quad (22)$$

Dalam perhitungan $|G_{13}|$, beberapa operasi matriks dilakukan secara berurutan yaitu operasi baris $\alpha_i^* = -\alpha_1 + \alpha_i$ untuk $i = 2, 3, 4, \dots, 2n$; lalu operasi kolom $\beta_j^* = -\beta_{2n} + \beta_j$ untuk $j = 3, 4, \dots, 2n - 1$; kemudian operasi baris $\alpha_1^* = \frac{\lambda-1}{\lambda} \alpha_2 + \alpha_1$; dengan menggunakan Teorema 2.2. didapatkan hasil

$$\begin{aligned} |G_{13}| &= (\lambda^2)^{\frac{2n-2}{2}} + (-1)^{1+2n} \cdot (-1) \left| (G_{13})^*_{1(2n)} \right| \\ &= \lambda^{2n-2} + \left| (G_{13})^*_{1(2n)} \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

Dalam perhitungan $\left| (G_{13})^*_{1(2n)} \right|$, beberapa operasi matriks dilakukan secara berurutan yaitu operasi baris $\alpha_i^* = \frac{-1}{\lambda} \alpha_{i+1} + \alpha_i$ untuk $i = 2, 4, 6, \dots, 2n - 2$; lalu operasi kolom $\beta_2^* = \lambda \beta_1 + \beta_2$; dilanjutkan dengan operasi kolom $\beta_3^* = \beta_2 + \beta_3$ lalu $\beta_3 \leftrightarrow \beta_4$; $\beta_5^* = \beta_4 + \beta_5$ dan $\beta_5 \leftrightarrow \beta_6$; $\beta_7^* = \beta_6 + \beta_7$ dan $\beta_7 \leftrightarrow \beta_8$ dan seterusnya hingga $\beta_{2n-1}^* = \beta_{2n-2} + \beta_{2n-1}$. Dengan menggunakan Teorema 2.2. didapatkan hasil

$$\begin{aligned} \left| (G_{13})^*_{1(2n)} \right| &= 1 \cdot (-\lambda^2)^{\frac{2n-1-3}{2}} ((n-1) \lambda^2) \\ &= (n-1) \lambda^{2(n-1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Persamaan (24) disubstitusikan ke persamaan (23) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} |G_{13}| &= \lambda^{2n-2} + \left| (G_{13})^*_{1(2n)} \right| \\ &= \lambda^{2(n-1)} + (n-1) \lambda^{2(n-1)} \\ &= n \lambda^{2(n-1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (22) dan (25) ke persamaan (19), didapatkan

$$\begin{aligned} P(B_{Fs}^n) &= |G| = (\lambda - 1) |G_{11}| - n |G_{13}| \\ &= (\lambda - 1) (\lambda^{2(n-1)} ((\lambda - 1)^2 - (n-1) (2\lambda - 1))) - n (n \lambda^{2(n-1)}) \\ &= \lambda^{2(n-1)} (\lambda^3 - (2n+1) \lambda^2 + 3n\lambda - n(n+1)). \end{aligned} \quad (26)$$

Dengan mencari akar-akar persamaan (26) yaitu $P(B_{Fs}^n) = \lambda^{2(n-1)} (\lambda^3 - (2n+1) \lambda^2 + 3n\lambda - n(n+1)) = 0$, didapatkan masing-masing λ_1 , λ_2 serta λ_3

adalah akar-akar persamaan pangkat tiga, yang secara umum λ_1 dan λ_2 merupakan bilangan kompleks dan λ_3 merupakan suatu bilangan riil untuk $n \geq 2$; serta $\lambda_4 = 0$ dengan $m(\lambda_4) = 2n - 2$. ■

Teorema 2.24. sesuai dengan Teorema 2.13., $P(B_{F_3}^n) = \lambda^{2n+1} - (2n + 1)\lambda^{2n} + 3n\lambda^{2n-1} - (n + n^2)\lambda^{2n-2}$, yakni koefisien λ^{2n} yaitu $a_1 = -(2n + 1)$ (negatif dari banyaknya simpul), koefisien λ^{2n-1} yaitu $a_2 = 3n$ (banyaknya busur) dan koefisien λ^{2n-2} yaitu $a_3 = -(n + n^2)$ (negatif dari banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul ditambah dua kali banyaknya C_3 siklik pada graf tersebut). Setiap simpul bukan simpul pusat (simpul luar) dalam setiap graf C_3 dapat membentuk lintasan Hamilton dengan melalui simpul pusat dan hanya satu simpul dalam graf C_3 lainnya sehingga banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Karena dalam setiap graf C_3 terdapat dua simpul luar maka banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul pada graf tersebut adalah $2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$. Graf *friendship* C_3^n berarah siklik yang dibahas dalam penelitian ini memiliki n buah C_3 sehingga $a_3 = -(n(n-1) + 2n) = -(n + n^2)$.

Teorema 2.25. Suatu graf *friendship* (C_3^n) berarah asiklik (1) seperti yang ditunjukkan di Tabel 2. dengan matriks anti-adjacency (B_{Fa1}^n) memiliki polinomial karakteristik $P(B_{Fa1}^n) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2n\lambda + n)$ dan $Spec(B_{Fa1}^n) = \begin{pmatrix} n + \sqrt{n(n-1)} & 1 & n - \sqrt{n(n-1)} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2n - 2 \end{pmatrix}$; dengan λ adalah nilai karakteristik matriks B_{Fa1}^n .

BUKTI. Sebut matriks $(\lambda I - B_{Fa1}^n)$ sebagai matriks K . Berdasarkan Teorema 2.1., dapat dihitung

$$|K| = (\lambda - 1) |K_{11}|. \quad (27)$$

Karena matriks K_{11} sama dengan matriks G_{11} maka berdasarkan persamaan (22) didapatkan

$$|K_{11}| = |G_{11}| = \lambda^{2(n-1)}((\lambda - 1)^2 - (n - 1)(2\lambda - 1)). \quad (28)$$

Persamaan (28) disubstitusikan ke persamaan (27) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} P(B_{Fa1}^n) &= |K| = (\lambda - 1) |K_{11}| \\ &= (\lambda - 1) \lambda^{2(n-1)} ((\lambda - 1)^2 - (n - 1)(2\lambda - 1)) \\ &= \lambda^{2(n-1)} (\lambda - 1) (\lambda^2 - 2n\lambda + n) \end{aligned} \quad (29)$$

Dengan mencari akar-akar persamaan (29) yaitu $P(B_{Fa1}^n) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2n\lambda + n) = 0$, didapatkan $\lambda_1 = n + \sqrt{n(n-1)}$ dengan $m(\lambda_1) = 1$, $\lambda_2 = 1$ dengan $m(\lambda_2) = 1$, $\lambda_3 = n - \sqrt{n(n-1)}$ dengan $m(\lambda_3) = 1$, dan $\lambda_4 = 0$ dengan $m(\lambda_4) = 2n - 2$. ■

Teorema 2.26. Suatu graf *friendship* (C_3^n) berarah asiklik (2) seperti yang ditunjukkan di Tabel 2. dengan matriks anti-adjacency (B_{Fa2}^n) memiliki polinomial karakteristik $P(B_{Fa2}^n) = \lambda^{2(n-1)}(\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + 3n\lambda - n^2)$ dan $Spec(B_{Fa2}^n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2n - 2 \end{pmatrix}$, λ_1 dan $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ untuk $n \geq 2$; dengan λ adalah nilai karakteristik matriks B_{Fa2}^n .

BUKTI. Sebut $M = (\lambda I - B_{Fa2}^n)$. Berdasarkan Teorema 2.6., dapat dihitung

$$\begin{aligned} P(B_{Fa2}^n) &= |M| = (\lambda - 1) |M_{11}| - n \cdot (0) |M_{12}| + (-1) |M_{13}| \\ &= (\lambda - 1) |M_{11}| - n |M_{13}|. \end{aligned} \quad (30)$$

Submatriks M_{11} adalah matriks transpose dari submatriks G_{11} sehingga berdasarkan sifat determinan matriks $|A| = |A^T|$ (Franklin [8]) dan persamaan (22) didapatkan

$$|M_{11}| = |G_{11}| = \lambda^{2(n-1)}((\lambda - 1)^2 - (n - 1)(2\lambda - 1)). \quad (31)$$

Dalam perhitungan $|M_{13}|$, beberapa operasi matriks dilakukan secara berurutan yaitu operasi baris $\alpha_i^* = -\alpha_1 + \alpha_i$ untuk $i = 2, 3, 4, \dots, 2n$; lalu operasi kolom $\beta_j^* = -\beta_{2n} + \beta_j$ untuk $j = 3, 4, \dots, 2n - 1$; kemudian operasi baris $\alpha_1^* = \alpha_2 + \alpha_1$; sehingga dengan menggunakan Teorema 2.1. didapatkan

$$|M_{13}| = (-1)^{1+2n} \cdot (-1) \left| (M_{13})^*_{1(2n)} \right| = \left| (M_{13})^*_{1(2n)} \right|. \quad (32)$$

Dalam perhitungan $\left| (M_{13})^*_{1(2n)} \right|$, beberapa operasi matriks dilakukan secara berurutan yaitu operasi kolom $\beta_2^* = (\lambda - 1)\beta_1 + \beta_2$; lalu $\beta_3^* = \beta_2 + \beta_3$ dan $\beta_3 \leftrightarrow \beta_4$; $\beta_5^* = \beta_4 + \beta_5$ dan $\beta_5 \leftrightarrow \beta_6$; kemudian $\beta_7^* = \beta_6 + \beta_7$ dan $\beta_7 \leftrightarrow \beta_8$ dan seterusnya hingga $\beta_{2n-1}^* = \beta_{2n-2} + \beta_{2n-1}$. Dengan menggunakan Teorema 2.2. dan persamaan (31) didapatkan hasil

$$|M_{13}| = \left| (M_{13})^*_{1(2n)} \right| = 1 \cdot (-\lambda^2)^{\frac{2n-1-3}{2}} (n - 1) \lambda^2 = \lambda^{2(n-1)} (n - 1). \quad (33)$$

Persamaan (31) dan (33) disubstitusikan ke persamaan (30) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} P(B_{Fa2}^n) &= |M| = (\lambda - 1) |M_{11}| - n |M_{13}| \\ &= (\lambda - 1) \lambda^{2(n-1)} ((\lambda - 1)^2 - (n - 1)(2\lambda - 1)) - n \lambda^{2n-2} (n - 1) \\ &= \lambda^{2(n-1)} (\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + 3n\lambda - n^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Dengan mencari akar-akar persamaan (34) yaitu $P(B_{Fa2}^n) = \lambda^{2(n-1)} (\lambda^3 - (2n + 1)\lambda^2 + 3n\lambda - n^2) = 0$, didapatkan masing-masing λ_1 , λ_2 serta λ_3 adalah akar-akar persamaan pangkat tiga, yang secara umum λ_1 dan λ_2 merupakan bilangan kompleks dan λ_3 merupakan suatu bilangan riil untuk $n \geq 2$; serta $\lambda_4 = 0$ dengan $m(\lambda_4) = 2n - 2$. ■

Perbedaan polinomial karakteristik matriks *anti-adjacency* dari graf *friendship* C_3^n berarah asiklik (1) dan (2) maupun dari graf *friendship* berarah siklik terletak pada koefisien suku keempat yang menyatakan negatif dari banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul ditambah dua kali banyaknya C_3 siklik pada graf tersebut (Teorema 2.13). Graf *friendship* berarah asiklik (1) maupun (2) tidak memiliki subgraf C_3 siklik sehingga koefisien suku keempat (a_3) menyatakan negatif dari banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul. Koefisien suku kelima dan seterusnya sama dengan nol. Hal ini bersesuaian dengan Firmansah [7], tidak ada lintasan berarah dari graf *friendship* berarah asiklik (1) maupun (2) yang memiliki panjang lebih dari dua.

Pada graf *friendship* berarah asiklik (1), $a_3 = -n$. Hal ini dapat dijelaskan, hanya ada satu lintasan Hamilton pada setiap subgraf C_3 dan graf C_3^n memiliki n subgraf C_3 sehingga ada n subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul. Spektrumnya sesuai dengan Teorema 2.16 yaitu $\sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_i = 1 + n - \sqrt{n(n-1)} + n + \sqrt{n(n-1)} = 2n + 1$ (banyaknya simpul) dan $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1^2 + (n - \sqrt{n(n-1)})^2 + (n + \sqrt{n(n-1)})^2 = (2n + 1)^2 - 2(3n)$.

Pada graf *friendship* berarah asiklik (2), $a_3 = -n^2$. Hal ini dapat dijelaskan, hanya ada satu lintasan Hamilton pada setiap subgraf C_3 dan graf C_3^n memiliki n

subgraf C_3 sehingga ada n subgraf C_3 terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton. Selain itu setiap simpul bukan simpul pusat (simpul luar) dalam setiap graf C_3 dapat membentuk lintasan Hamilton dengan melalui simpul pusat dan hanya satu simpul dalam graf C_3 lainnya sehingga banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Karena dalam setiap graf C_3 terdapat dua simpul luar maka banyaknya subgraf terinduksi asiklik yang memiliki lintasan Hamilton dari tiga buah simpul pada graf tersebut adalah $2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$. Jadi $a_3 = -(n + n(n-1)) = -n^2$.

Polinomial karakteristik matriks *anti-adjacency* dari graf *friendship* (C_3^n) lebih banyak memuat informasi dibandingkan polinomial karakteristik matriks *adjacency* dari graf yang sama. Hal ini tampak pada perbedaan banyaknya suku pada polinomial karakteristik kedua matriks tersebut.

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang sudah dipaparkan pada bagian 2 didapatkan kesimpulan sebagai berikut :

1. Matriks *anti-adjacency* dapat membedakan polinomial karakteristik dan spektrum graf *friendship* (C_3^n) berarah asiklik (1) dan (2), sedangkan matriks *adjacency* memberikan hasil yang sama untuk kedua graf tersebut.
2. Polinomial karakteristik matriks *anti-adjacency* dari graf *friendship* C_3^n lebih banyak memuat informasi dibandingkan polinomial karakteristik matriks *adjacency* dari graf yang sama.

Referensi

- [1] Abdollahi A., Janbaz S., & Oboudi M. R., 2013, Graphs Cospectral with A Friendship Graph or Its Complement, *Transactions on Combinatorics*, Vol. 2 No. 4, 37-52.
- [2] Adiati, N. P. R., 2015, Sifat Nilai Karakteristik Matriks Anti-adjacency dari Graph Berarah Sederhana, Tesis, Universitas Indonesia.
- [3] Bapat, R., 2010, *Graphs and Matrices*, India, Hindustan Book Agency.
- [4] Biggs, N., 1993, *Algebraic Graph Theory*, 2nd ed., New York, Cambridge Mathematical Library.
- [5] Chartrand, G. & Lesniak, L., 1996, *Graph & Digraphs* (3rd edition), California, Chapman & Hall/CRC.
- [6] Cvetkovic D., Rowlinson P. and Simic. S., 2010, An Introduction to the Theory of Graph Spectra, *London Mathematical Society Student Texts*, 75, Cambridge, Cambridge University Press.
- [7] Firmansah, F., 2014, Polinomial Karakteristik Matriks *Anti-adjacency* dari Graf Berarah yang *Acylic*, Tesis, Universitas Indonesia.
- [8] Franklin, J. N., 2000, *Matrix Theory*. NY, Dover Publication, Inc.
- [9] Knauer, U., 2011, *Algebraic Graph Theory: Morphism, Monoids, and Matrices*, Walter de Gruyter GmbH & Co.
- [10] Mertzios, G.B. & Unger, W., 2008, The Friendship Problem on Graphs, ROGICS'08.
- [11] Meyer, C. D., 2000, *Matrix Analysis and Applied Linier Algebra*, New Jersey, SIAM.
- [12] Nugroho, E., 2013, Polinomial Karakteristik Matriks *Anti-adjacency* dari *Out-Tree*, Tesis, Universitas Indonesia.
- [13] Wildan, 2015, Polinomial Karakteristik Matriks *Anti-adjacency* dan *Adjacency* dari Graf Sederhana yang diberi Orientasi, Tesis, Universitas Indonesia.

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TANGGA SEGITIGA VARIASI x_N

KURNIAWAN ATMADJA¹, KIKI A. SUGENG²

¹Prodi Matematika Institut Sains dan Teknologi Nasional, Jakarta selatan,
trikmipa11@gmail.com

²Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Indonesia, Kampus UI, Depok 16424,
kiki@sci.ui.ac.id

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan tak kosong simpul $V = V(G)$ dan himpunan busur $E = E(G)$ dimana $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ menyatakan banyaknya simpul dan banyaknya busur pada G . Suatu pemetaan f dari V ke $\mathbb{Z}_{|E(G)|}$ dimana $|V(G)| \leq |E(G)|$ disebut **pelabelan harmonis** jika f merupakan **pemetaan injektif** sedemikian hingga ketika setiap busur xy dilabel dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y) \pmod{|E(G)|}$ menghasilkan label busur yang berbeda. Graf tangga segitiga variasi X_n adalah graf yang diperoleh melalui penambahan satu simpul w_i yang diletakan di antara simpul v_i dan simpul v_{i+1} pada graf tangga L_n . Sehingga ada tambahan 4 jenis busur antara lain : $u_i w_i \mid 1 \leq i \leq n$; $v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n$; $u_{i+1} w_i \mid 1 \leq i \leq n-1$; $w_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1$. Keempat jenis busur ini menggantikan busur $v_i v_{i+1}$ pada graf tangga semula. Sedangkan graf tangga L_n adalah graf $P_n \times P_2$ dengan $V(L_n) = \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Pada makalah ini diberikan konstruksi pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga variasi.

Kata kunci : graf tangga segitiga, pelabelan graf harmonis.

1. Pendahuluan

Misalkan $G = (V, E)$, dapat disingkat G , adalah graf yang terdiri dari himpunan simpul tak kosong V dan himpunan busur E . Notasi $|V|$ dan $|E|$ menyatakan banyak simpul V dan banyak busur E pada graf G . Syarat $|E| \geq |V|$ merupakan syarat agar pada graf G dapat mempunyai pelabelan harmonis. Pelabelan harmonis pertama kali diperkenalkan oleh Graham dan Sloane [4], berawal dari masalah *error-correcting code* [4]. Pelabelan harmonis didefinisikan sebagai suatu pemetaan injektif dari $V(G)$ ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label $f^* = f(x) + f(y)$ menghasilkan label busur berbeda. Graf yang mempunyai pelabelan harmonis disebut graf Harmonis.

Beberapa kelas graf sudah dikategorikan sebagai graf harmonis antara lain graf firecracker, hairy cycle, korona, gabungan graf caterpillar dan gabungan graf firecracker teratur [5], graf Tangga Segitiga [2]. Untuk hasil survey yang lengkap dapat dilihat di Gallian survey [3].

2. Hasil – hasil utama

Definisi 2.1. Graf Tangga L_n adalah graf tangga sederhana dengan himpunan simpul $V(L_n) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan busur $E(L_n) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, dan graf ini dapat dilihat sebagai produk kartesius $P_2 \times P_n$.

Pada makalah ini dikaji graf tangga L_n ($n \geq 2$) dengan melakukan penambahan satu simpul w_i yang diletakkan di antara simpul v_i dan v_{i+1} pada lintasan $v_i v_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$, sehingga ada tambahan 4 jenis busur yang menggantikan busur $v_i v_{i+1}$, untuk setiap i , $1 \leq i \leq n - 1$.

Dari kajian ini, graf tangga L_n ($n \geq 2$) yang mengalami penambahan busur, berubah menjadi bentuk graf tangga baru, dan hasil modifikasinya diperoleh graf tangga yang memuat segitiga. Grafnya disebut graf tangga segitiga variasi X_n . Graf tangga segitiga variasi X_n selalu mempunyai banyak busur lebih besar dari banyak simpul, sehingga memenuhi syarat awal untuk mengkonstruksi pelabelan harmonis.

Definisi 2.2. Graf Tangga X_n adalah graf tangga segitiga variasi, dengan himpunan simpul $V(X_n) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan busur $E(X_n) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i+1} w_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Berikut akan dibuktikan bahwa graf tangga segitiga variasi X_n adalah graf harmonis yang terangkum dalam teorema berikut.

Teorema 2.3. Graf tangga segitiga variasi X_n untuk $n \geq 2$ adalah harmonis.

BUKTI. Misalkan himpunan simpul $V(X_n) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan busur $E(X_n) = \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{i+1} w_i \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Definisikan pelabelan simpul $f : V \rightarrow Z_{|E|}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i - 2, & \text{untuk } i \text{ ganjil ; } 1 \leq i \leq n, \\ 3i - 3, & \text{untuk } i \text{ genap ; } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 3i - 3, & \text{untuk } i \text{ ganjil ; } 1 \leq i \leq n, \\ 3i - 2, & \text{untuk } i \text{ genap ; } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

$$f(w_i) = 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1.$$

Perhitungan label simpul di atas pada graf tangga segitiga variasi X_n , dapat dikelompokkan sebagai berikut :

1. Pelabelan simpul untuk i ganjil, ; $1 \leq i \leq n$

- $f(u_i) = 3i - 2 \in \{1, 7, 13, \dots, 3n - 2\} \subset 1 \pmod 6 = \bar{1} \dots (1)$

- $f(v_i) = 3i - 3 \in \{0, 6, 12, \dots, 3n - 3\} \subset 0 \pmod 6 = \bar{0} \dots (2)$

2. Pelabelan simpul untuk i genap, $2 \leq i \leq n$

- $f(u_i) = 3i - 3 \in \{3, 9, 15, \dots, 3n - 3\} \subset 3 \pmod 6 = \bar{3} \dots (3)$

- $f(v_i) = 3i - 2 \in \{4, 10, 16, \dots, 3n - 2\} \subset 4 \pmod 6 = \bar{4} \dots (4)$

3. $f(w_i) = 3i - 1$; $1 \leq i \leq n - 1 \in \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots, 3n - 4\} \subset (2 \pmod 6) \cup (5 \pmod 6)$

$$= \bar{2} \cup \bar{5} \dots (5)$$

Dari persamaan (1) sampai (5) dapat ditulis himpunan simpul sebagai berikut :

$f(V(X_n)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots, 3n - 2\}$. Pelabelan simpul yang berada di masing-masing pernyataan (1), (2), (3), (4) dan (5) akan menghasilkan simpul yang berbeda karena masing-masing berada di himpunan mod 6 yang berbeda. Sedangkan untuk masing masing pernyataan juga akan menghasilkan label yang berbeda untuk

setiap $i, 1 \leq i \leq n$ yang berbeda. Label simpul terkecil dari himpunan simpul di atas

adalah label v_1 , sedangkan label simpul terbesar untuk n bilangan ganjil terletak pada label simpul u_n , dimana $f(u_n) = 3n - 2$, sedangkan untuk n genap terletak pada label simpul v_n dimana $f(v_n) = 3n - 2$.

Nampak bahwa :

$f(V(X_n)) \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 6n - 6\} = E(X_n)$ dan label setiap simpul X_n berbeda .

Jadi pelabelan simpul f yang didefinisikan pada persamaan (1) sampai persamaan (5) merupakan pemetaan injektif $(V(X_n)) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, (|E| - 1)\}$.

Pelabelan f akan menginduksi pelabelan busur sebagai berikut :

$$(1.) f^*(u_i u_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 2 ; 1 \leq i \leq (n - 1).$$

$$(2.) f^*(u_i v_i) = 3i - 2 + 3i - 3 = 6i - 5 ; 1 \leq i \leq n.$$

$$(3.) f^*(v_i w_i) = \begin{cases} 3i - 3 + 3i - 1 = 6i - 4 ; i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n - 1, \\ 3i - 2 + 3i - 1 = 6i - 3 ; i \text{ genap} ; 2 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

$$(4.) f^*(u_i w_i) = \begin{cases} 3i - 2 + 3i - 1 = 6i - 3 ; i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n - 1, \\ 3i - 3 + 3i - 1 = 6i - 4 ; i \in \text{genap} ; 2 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

$$(5.) f^*(u_{i+1} w_i) = \begin{cases} 3(i + 1) - 3 + 3i - 1 = 6i - 1 ; i \text{ ganjil} ; 1 \leq i \leq n - 1, \\ 3(i + 1) - 2 + 3i - 1 = 6i ; i \text{ genap} ; 2 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

$$(6) f^*(v_{i+1}w_i) = \begin{cases} 3(i+1) - 2 + 3i - 1 = 6i; & i \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq n-1, \\ 3(i+1) - 3 + 3i - 1 = 6i - 1; & i \text{ genap}; 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Perhitungan label busur di atas pada graf tangga X_n dapat dikelompokkan dalam 4(empat) kasus, yaitu :

1. Label busur pada busur $u_i u_{i+1}$; $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} f^*(u_i u_{i+1}) &= f(u_i) + f(u_{i+1}) \\ &= 3i - 2 + 3(i+1) - 3 \\ &= 6i - 2 \\ &\in \{4, 10, 16, 22, 28, 34, \dots, 6n - 8\} \subset (4 \bmod 12) \cup (10 \bmod 12) \\ &= \bar{4} \cup \bar{10} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

2. Label busur pada busur $u_i v_i$; $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} f^*(u_i v_i) &= f(u_i) + f(v_i) \\ &= 3i - 2 + 3i - 3 \\ &= 6i - 5 \in \{1, 7, 13, 19, 25, 32, \dots, 6n - 5\} \\ &\quad \subset (1 \bmod 12) \cup (7 \bmod 12) \\ &= \bar{1} \cup \bar{7} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

3. Label busur pada busur dengan i ganjil terkait penambahan simpul w_i

- $f^*(v_i w_i) = f(v_i) + f(w_i)$
 $= 3i - 3 + 3i - 1$
 $= 6i - 4 \in \{2, 14, 26, \dots, 6n - 4\} \subset 2 \bmod 12 = \bar{2}$ (8)

- $f^*(u_i w_i) = f(u_i) + f(w_i)$
 $= 3i - 2 + 3i - 1$
 $= 6i - 3 \in \{3, 15, 27, \dots, 6n - 3\} \subset 3 \bmod 12 = \bar{3}$ (9)

- $f^*(u_{i+1} w_i) = f(u_{i+1}) + f(w_i)$
 $= 3(i+1) - 3 + 3i - 1$
 $= 6i - 1 \in \{5, 17, 29, \dots, 6n - 1\} \subset 5 \bmod 12 = \bar{5}$ (10)

- $f^*(v_{i+1} w_i) = f(v_{i+1}) + f(w_i)$
 $= 3(i+1) - 2 + 3i - 1$
 $= 6i \in \{6, 18, 30, \dots, 6n\} \subset 6 \bmod 12 = \bar{6}$ (11)

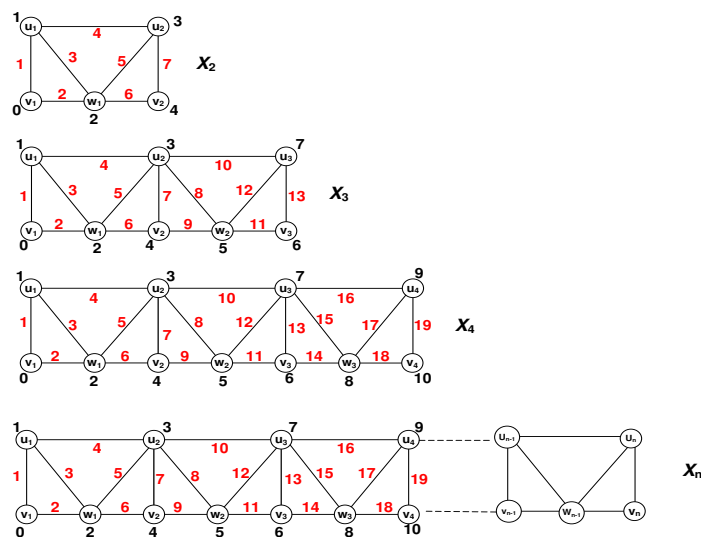
4. Label busur pada busur dengan i genap terkait penambahan simpul w_i

- $f^*(v_i w_i) = f(v_i) + f(w_i)$
 $= 3i - 2 + 3i - 1$
 $= 6i - 3 \in \{9, 21, 33, \dots, 6n - 3\} \subset 9 \bmod 12 = \bar{9}$ (12)

- $$\begin{aligned}
 f^*(u_i w_i) &= f(u_i) + f(w_i) \\
 &= 3i - 3 + 3i - 1 \\
 &= 6i - 4 \in \{8, 20, 32, \dots, 6n - 4\} \subset 8 \pmod{12} = \bar{8} \quad (13)
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 f^*(u_{i+1} w_i) &= f(u_{i+1}) + f(w_i) \\
 &= 3(i + 1) - 2 + 3i - 1 \\
 &= 6i \in \{12, 24, 36, \dots, 6n\} \subset 12 \pmod{12} = \bar{0} \quad (14)
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 f^*(v_{i+1} w_i) &= f(v_{i+1}) + f(w_i) \\
 &= 3(i + 1) - 3 + 3i - 1 \\
 &= 6i - 1 \in \{11, 23, 35, \dots, 6n - 1\} \subset 11 \pmod{12} = \bar{11} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (6) sampai dengan (15) didapat pelabelan ini mengakibatkan setiap busur xy diberi label $(f(x) + f(y)) \pmod{|E|}$ menghasilkan label busur yang berbeda (dengan alasan yang serupa dengan pelabelan simpul) dan karena banyak busur adalah $|E|$ dan label yang digunakan adalah $1, 2, \dots, |E|$, maka pelabelan busur menghasilkan pelabelan yang bijektif. Jadi graf X_n adalah graf harmonis.

Contoh 2.4. Sebagai contoh di bawah ini diberikan pelabelan harmonis X_2, X_3, X_4, X_n pada beberapa graf tangga segitiga variasi seperti yang terlihat pada pada Gambar 1.



Gambar 1

3. Kesimpulan

Graf X_n adalah perluasan dari Graf Tangga L_n dan merupakan graf harmonis.

Pernyataan terima kasih. Akhirnya saya ucapkan terimakasih kepada segenap panitia penyelenggara Seminar Nasional Matematika 2017 Universitas Indonesia yang telah memberi kesempatan terpublikasinya tulisan makalah ini.

Referensi

- [1] Asih, AJ, Silaban, D. R., Sugeng, K.A. *Pelabelan Harmonis pada Graf Firecracker, Graf Hairy Cycle dan Graf Korona*, Prosiding Seminar Nasional 2010, Departemen Matematika FMIPA UI, 87-90.
- [2] Atmadja, K, Sugeng, K.A, Yuniarko.T, *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII-2014, ITS Surabaya.
- [3] Gallian, J. A., Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2013, **16**, #DS6.
- [4] Graham ,R.L & Sloan , N.J., On Additive Bases and Harmonious Graphs. *SIAM.J.Alg. Discrete Math.*1980, Vol 1, No 3, 382 – 404.
- [5] Wirnadian, P, *Pelabelan Harmonis pada Kombinasi Gabungan Graf Caterpillar dan Graf Firecracker Teratur*, Tesis, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Program Studi Magister Matematika, Universitas Indonesia, 2010.

Didukung oleh:

PT Reasuransi Indonesia Utama

Universitas Gunadarma

PT Tokio Marine Life Insurance Indonesia

PT AIA Financial Indonesia

PT BNI Life Insurance

BPJS Ketenagakerjaan

Persatuan Aktuaris Indonesia (PAI)

PT Asuransi Cigna

Vol. 3, September 2017

ISSN : 1907 - 2562

**Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran**

<http://www.math.ui.ac.id/snm2017>