Bahan Ajar
Mekanika Bahan

Ir. Totok Andi Prasetyo, ST., MT

ISTN

PROGRAM STUDI TEKNIK SIPIL
FAKULTAS TEKNIK SIPIL DAN PERENCANAAN
INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL

Kuliah 10
Defleksi Balok

Defleksi Balok

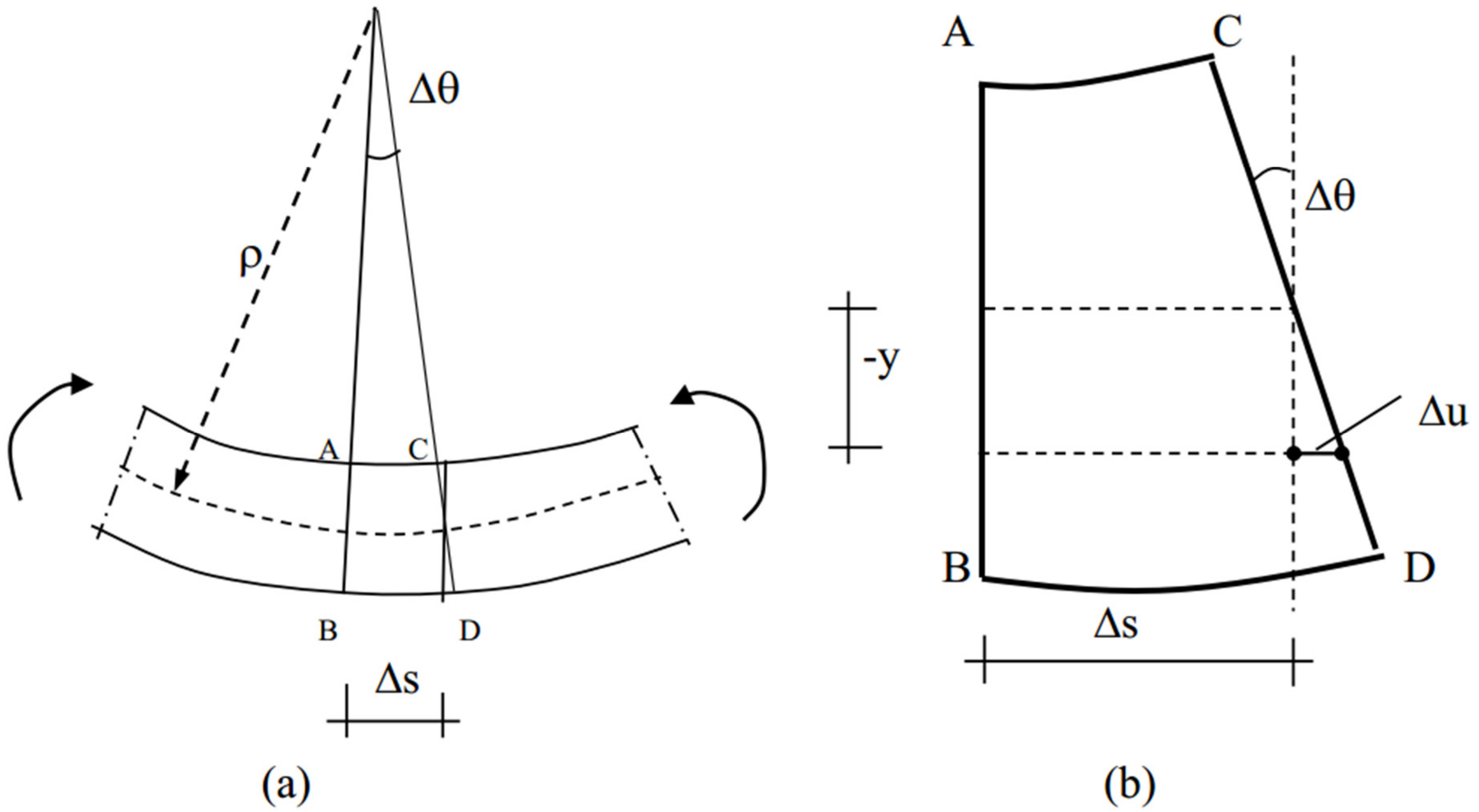
1. Pendahuluan

Sumbu sebuah balok akan mengalami defleksi (melentur) akibat beban yang bekerja padanya. Walaupun tegangan tegangan akibat gaya-gaya dalam sudah memenuhi persyaratan namun defleksi yang terjadi pada balok tidak boleh melampaui batas yang telah ditetapkan. Defleksi balok yang berlebihan pada gedung dapat merusak komponen-komponen antara lain partisi, kusen. Defleksi yang berlebihan juga dapat menjadi beban psikologis dari pengguna struktur.

Pada pembahasan ini defleksi yang ditinjau adalah defleksi yang disebabkan oleh gaya-gaya yang tegak lurus dengan sumbu balok. Demikian pula defleksi yang ditinjau hanya disebabkan oleh momen lentur, sedangkan yang diakibatkan oleh gaya lintang akan diabaikan sebab defleksi akibat gaya lintang biasanya sangat kecil kira-kira 1 %.

2. Hubungan Regangan – Kurvatur dan Momen – Kurvatur

Potongan yang berbentuk bidang datar akan tetap merupakan bidang datar selama berdeformasi (Hukum Bernoulli).



Gambar 9.1 Deformasi Segmen Balok Akibat Lentur

Defleksi Balok

Dari Gambar 9.1.b diperoleh persamaan

$$\Delta u = - y d\theta \tag{9.1}$$

Persamaan 9.1 dibagi dengan Δs, sehingga diperoleh:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}$$

$$\frac{du}{ds} = -y \frac{d\theta}{ds} \tag{9.2}$$

$\frac{du}{ds}$ adalah regangan linier dalam serat balok pada jarak y dari garis netral sehingga

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon$$

Defleksi Balok

Dari Gambar 9.1.a diperoleh :

$$\Delta s = \rho.\Delta\theta$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad (9.3)$$

Dari persamaan 2 :

$$\frac{du}{ds} = -y\frac{d\theta}{ds}$$

$$\varepsilon = -y\frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

Defleksi Balok

$\frac{d\theta}{ds}$ disubstitusi ke Persamaan 9.3, sehingga :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{9.4}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{(Hukum Hooke)}$$

$$\sigma_x = -\frac{M.y}{I} \quad \text{(Hukum Bernoulli)}$$

$$y = -\frac{\sigma_x I}{M}$$

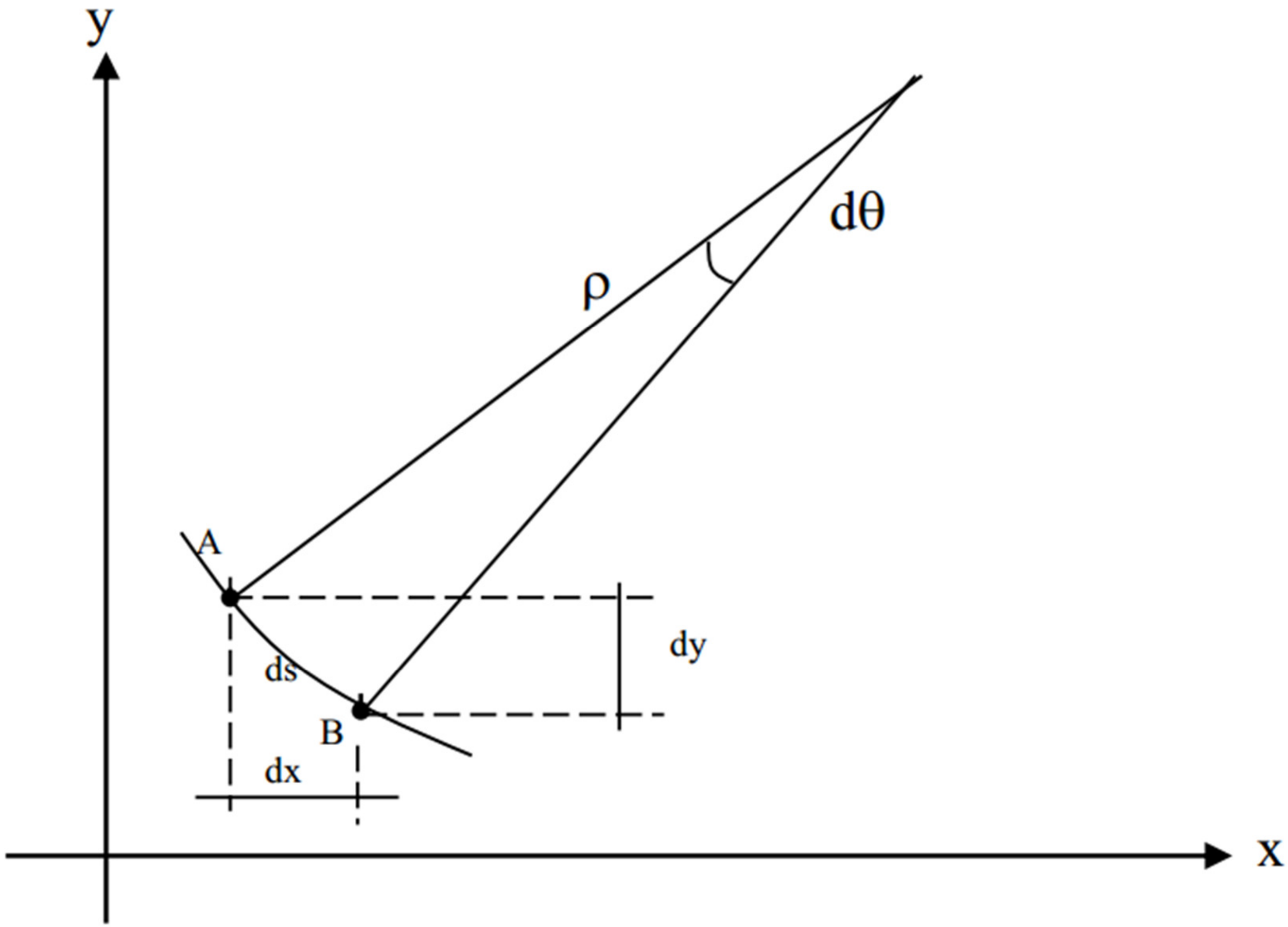
Defleksi Balok

Dari persamaan 9.4 diperoleh :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{\sigma_x}{E}}{\dfrac{\sigma_x I}{M}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{9.5}$$

Defleksi Balok



Gambar 9.2 Garis Kelengkungan Balok

ds = AB

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = dx\ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ρ = radius kelengkungan

AB = ds = ρdθ

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dtg\,\theta}.\frac{dtg\,\theta}{d\theta}$$

$$\frac{dtg\,\theta}{d\theta} = \frac{d\,\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{d\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta = 1 + tg^2\theta \text{ atau}$$

$$\frac{dtg\,\theta}{d\theta} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ dengan } tg\,\theta = \frac{dy}{dx}$$

Defleksi Balok

$$\rho = \frac{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{dtg\theta}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{dtg\theta}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Nilai $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ merupakan nilai yang sangat kecil, oleh sebab itu dapat diabaikan sehingga :

Defleksi Balok

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Dari Gambar 9.2 terlihat bahwa apabila x bertambah maka nilai $tg\theta = \dfrac{dy}{dx}$ berkurang yang berarti $\dfrac{dtg\theta}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ bertanda negatif.

Apabila $\dfrac{1}{\rho}$ disubstitusi ke Persamaan 9.5. maka :

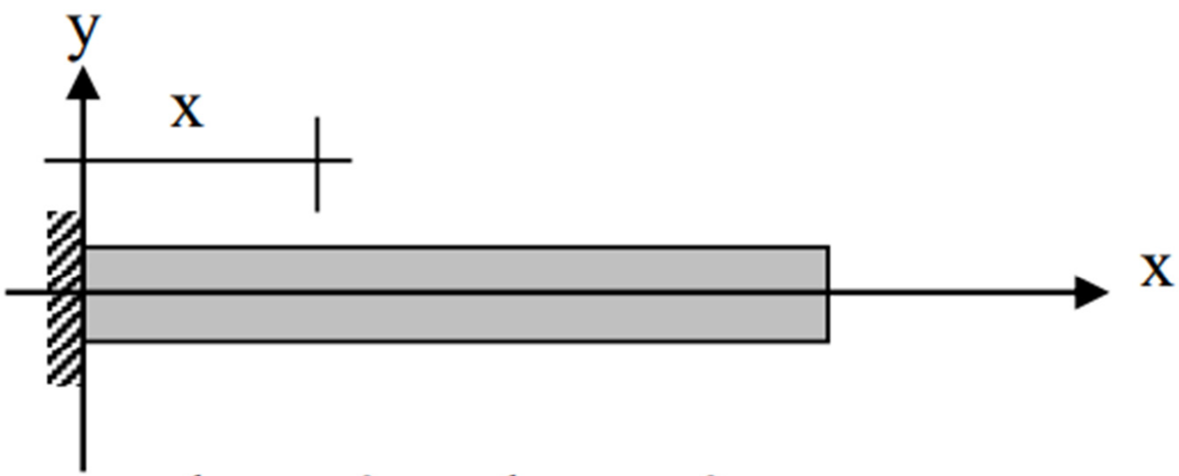
$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Rumus diatas merupakan persamaan deferensial, sehingga untuk menyelesaikannya diperlukan syarat batas sesuai dengan jenis struktur yang ada.

Defleksi Balok

3. Syarat-Syarat Batas

Tumpuan jepit

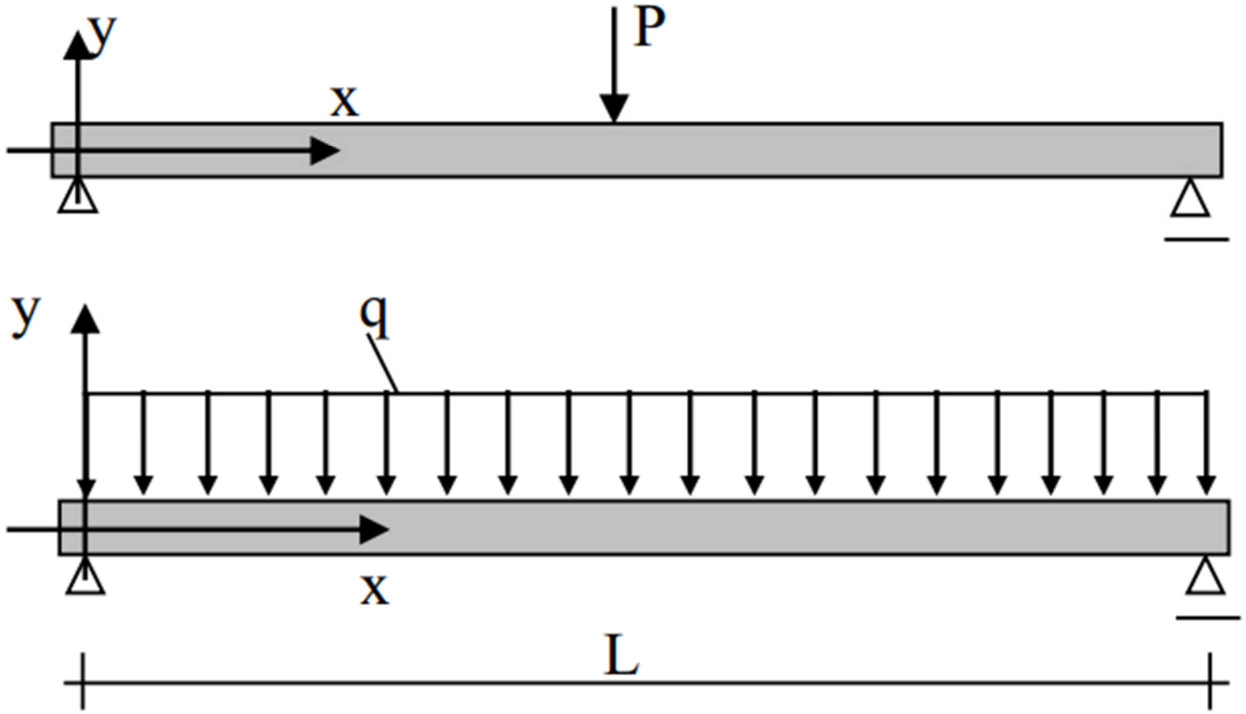


untuk x = 0, maka y = 0

untuk x = 0, maka $\dfrac{dy}{dx} = 0$

Defleksi Balok

Tumpuan sendi roll dengan beban seperti tergambar

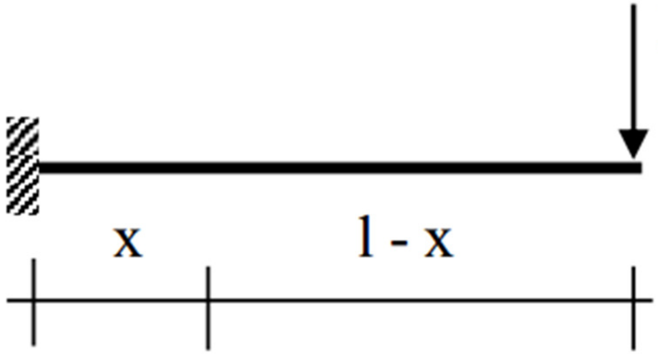


untuk $x = 0$, maka $y = 0$

untuk $x = L/2$, maka

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Contoh Soal 1



Balok terjepit sebelah seperti tergambar, dengan gaya terpusat.

1. Tentukan persamaan sudut rotasi dan hitung pula sudut rotasi pada ujung bebas!
2. Tentukan persamaan defleksi dan hitung pula defleksi di ujung bebas!

Penyelesaian

Penyelesaian :

1. $M_x = -P(l-x)$

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(l-x)}{EI}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\int (l-x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}(lx - \tfrac{1}{2}x^2 + C)$$

Syarat batas untuk x = 0, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Sehingga:

$$0 = \frac{P}{EI}(l.0 - \tfrac{1}{2}.0^2 + C)$$

$$C = 0$$

Jadi persamaan sudut rotasi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}(lx - \tfrac{1}{2}x^2)$$

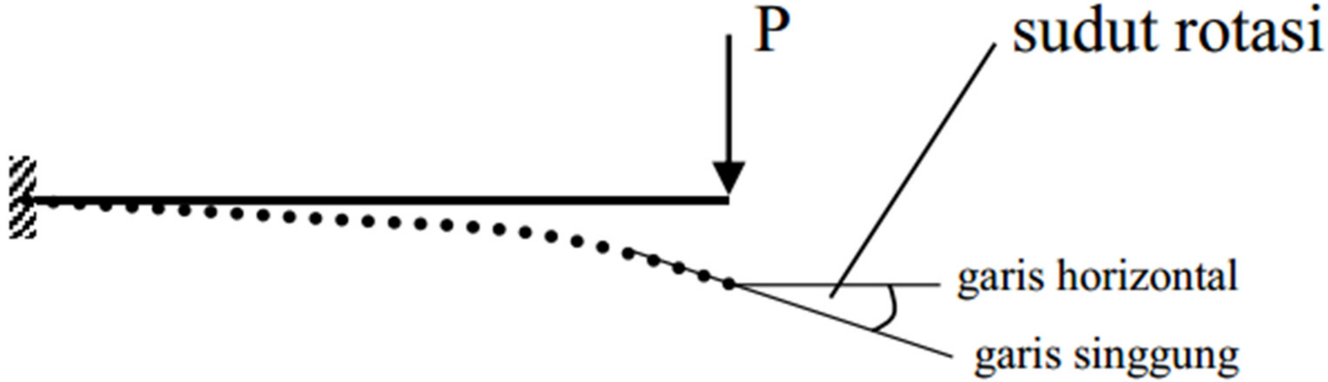
Penyelesaian

Penyelesaian

Sudut rotasi pada ujung bebas, x = l

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}(l^2 - ½l^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pl^2}{2EI} \text{ (sudut rotasi)}$$



Penyelesaian

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}(lx - \tfrac{1}{2}x^2)$$

$$y = \frac{P}{EI}\int (lx - \tfrac{1}{2}x^2)dx$$

$$y = \frac{P}{EI}(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + D)$$

Syarat batas : untuk x = 0, maka y = 0

Sehingga :

$$0 = \frac{P}{EI}(\tfrac{1}{2}l.0^2 - \tfrac{1}{6}.0^3 + D$$

D = 0

Jadi persamaan defleksi :

$$y = \frac{P}{EI}(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3)$$

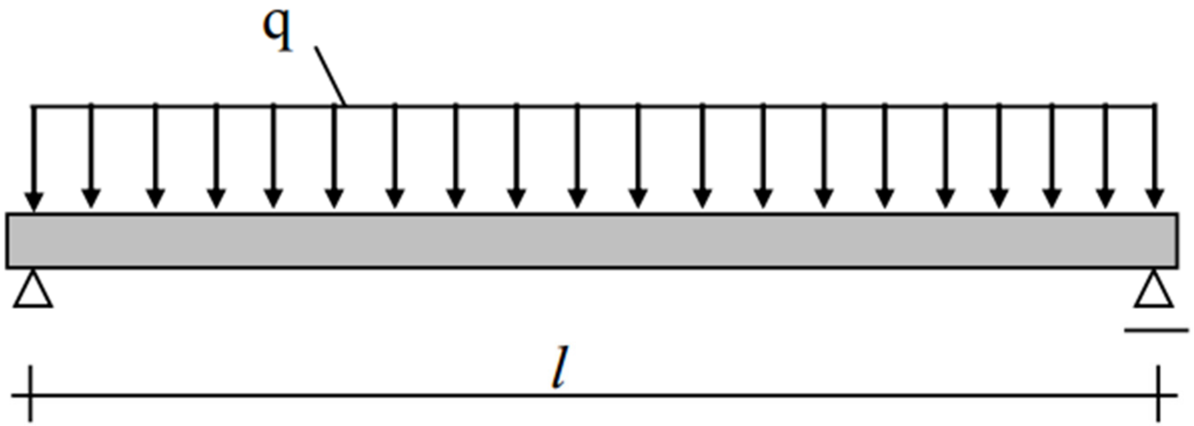
Defleksi pada ujung bebas x = l

$$y = \frac{P}{EI}(\tfrac{1}{2}l^3 - \tfrac{1}{6}l^3)$$

$$y = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Penyelesaian

Contoh Soal 2

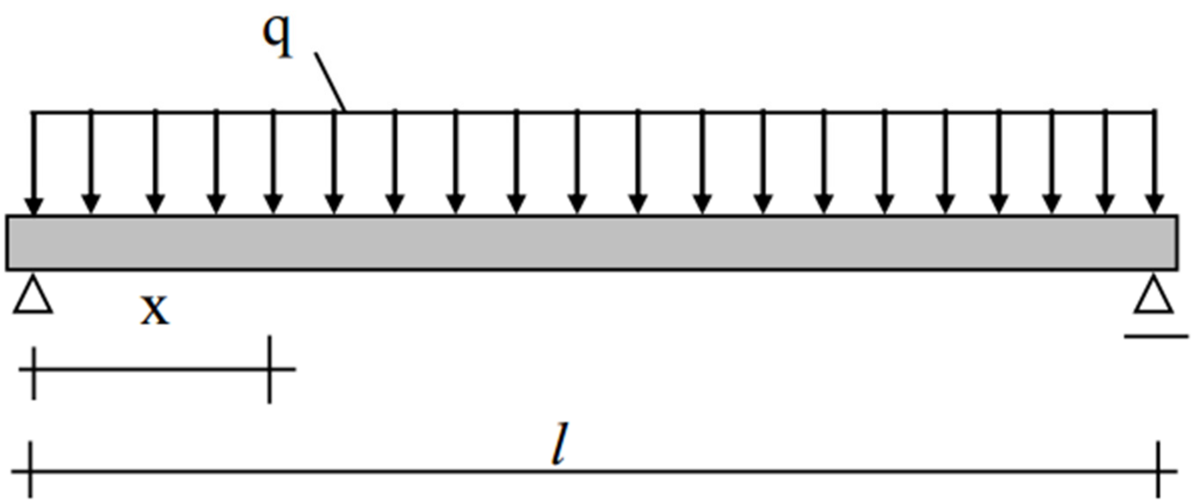


Balok terletak diatas dua perletakan sendi roll dengan beban merata q, seperti tergambar.

1. Tentukan persamaan putaran sudut pada balok, tentukan pula putaran sudut pada perletakan.
2. Tentukan persamaan defleksi pada balok, tentukan pula defleksi maksimum pada balok

Penyelesaian

Penyelesaian :



$M_x = ½ \, ql x - ½ q x^2$

$M_x = ½ \, q(l x - x^2)$

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{2EI}(lx - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI}\int (lx - x^2)dx$$

Penyelesaian

Syarat batas :

Untuk x = ½ l, $\frac{dy}{dx} = 0$

Sehingga :

$$0 = -\frac{q}{2EI}\left[\tfrac{1}{2}l(\tfrac{1}{2}l)^2 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}l)^3 + C\right]$$

$$0 = \frac{q}{2EI}\left[\tfrac{1}{12}l^3 + C\right]$$

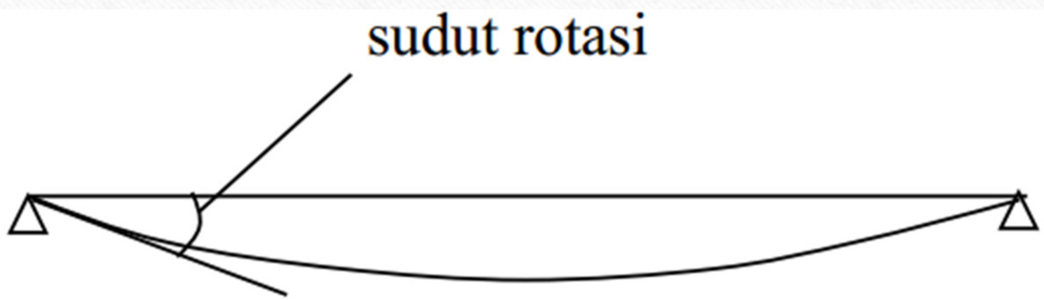
$$C = -\tfrac{1}{12}l^3$$

Jadi persamaan putaran sudut :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}l^3)$$

Sudut rotasi pada perletakan, x = 0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ql^3}{24EI}$$



Penyelesaian

2.
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2EI}\left(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}l^3\right)$$

$$y = -\frac{q}{2EI}\int\left(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}l^3\right)dx$$

$$y = -\frac{q}{2EI}\left(\tfrac{1}{6}lx^3 - \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}l^3x + D\right)$$

Syarat batas pada x = 0, maka y = 0
Sehingga D = 0
Jadi persamaan defleksi :

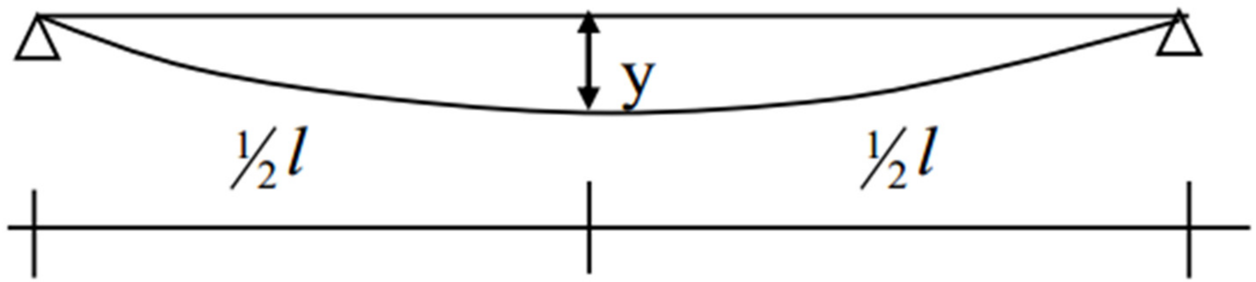
$$y = -\frac{q}{2EI}\left(\tfrac{1}{6}lx^3 - \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}l^3x\right)$$

Penyelesaian

Defleksi akan maksimum bila x = ½ l

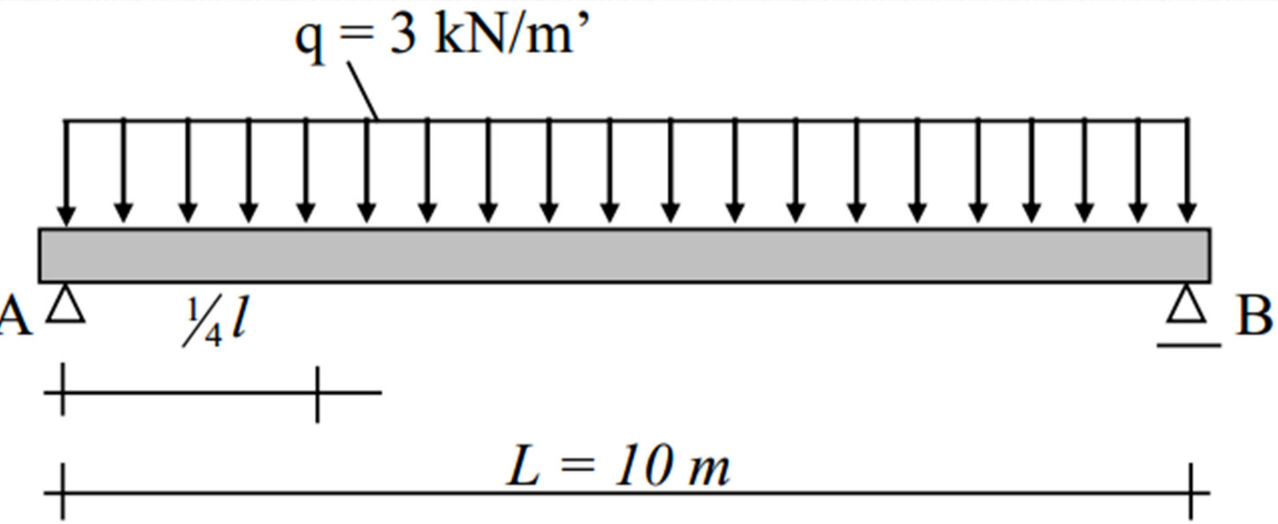
$$y = -\frac{q}{2EI}\left[(\tfrac{1}{6}l(\tfrac{1}{2}l)^3 - \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}l)^4 - \tfrac{1}{12}l^3(\tfrac{1}{2}l)\right]$$

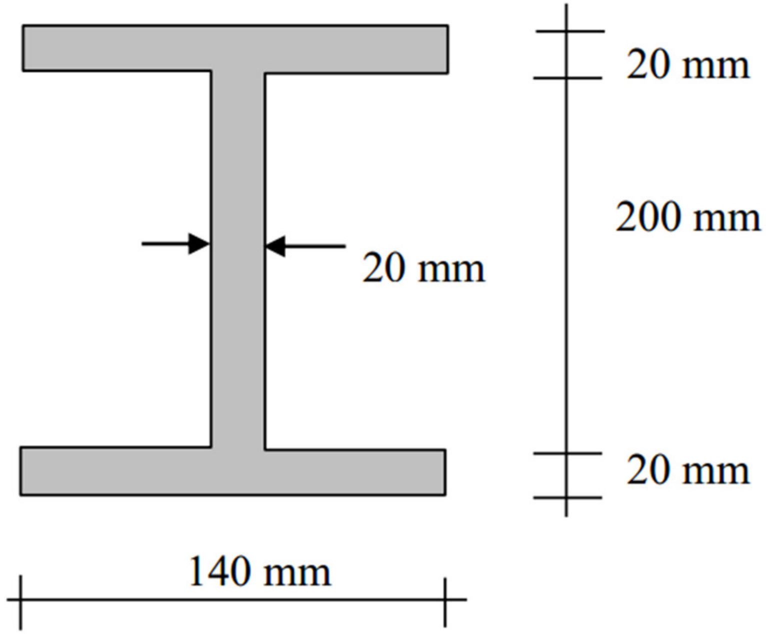
$$y = \frac{5ql^4}{384EI}$$



Contoh Soal 3

Balok dengan penampang seperti tergambar, memikul beban terbagi rata sebesar 3 kN/m'. Hitung defleksi balok pada jarak ¼ *l* dari A. Modulus elastisitas bahan = 2.10^5 MPa.





Penampang Balok

Penyelesaian

Penyelesaian :

$$I_x = (\tfrac{1}{12}.140.20^3 + 20.140.110^2)2 + \tfrac{1}{12}20.200^3 = 8128.10^4 \text{ mm}^4$$

Persamaan defleksi balok dari Contoh 9.2 :

$$y = -\frac{q}{2EI}(\tfrac{1}{6}lx^3 - \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}l^3x)$$

$$y = -\frac{q}{2EI}\left[\tfrac{1}{6}l(\tfrac{1}{4}l)^3 - \tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{4}l)^4 - \tfrac{1}{12}l^3(\tfrac{1}{4}l)\right]$$

$$y = \frac{19ql^4}{2048EI}$$

Penyelesaian

$q = 3\ kN/m' = 3\ N/mm$

$l = 10.10^3\ mm = 10^4\ mm$

$E = 2.10^5\ MPa$

$I\ = 8128.10^4\ mm^4$

$$y = \frac{19.3.(10^4)^4}{2048.2.10^5.8128.10^4} = 17,12\ mm$$

Jadi defleksi pada jarak ¼ l dari perletakan A sebesar 17,12 mm.

Terima Kasih