# BIDANG PENDIDIKAN DAN PENGAJARAN

## BERITA ACARA PERKULIAHAN

## KULIAH ONLINE(*E-LEARNING*)

## PERIODE SEMESTER GANJIL 2023-2024

MATA KULIAH:

# MATEMATIKA TEKNIK 1

*LAMPIRAN BERITA ACAR A PERKULIAHAN :*

1. *SK.DEKAN FTI SEMESTER GANJIL 2023/2024*
2. *PRESENSI KEHADIRAN DOSEN  DAN MATERI AJAR*
3. *CONTOH HAND OUT MATERI AJAR*
4. *NILAI KOMULATIF; KEHADIRAN,TUGAS, UTS DAN UAS*

**PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO**

**FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI**

**INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL**

YAYASAN PERGURUAN CIKINI
**INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL**
Jl. Moh. Kahfi II, Bhumi Srengseng Indah, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12640
Telp. 021-7270090 (hunting), Fax. 021-7866955, hp: 081291030024
Email : humas@istn.ac.id Website : www.istn.ac.id

# SURAT PENUGASAN TENAGA PENDIDIK

Nomor : 287 / 03.1 – G / IX / 2023

## SEMESTER *GANJIL*, TAHUN AKADEMIK 2023 / 2024

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nama | : | **M. Ikrar Yamin, ST.MTrT** | Status Pegawai | : | Edukatif Tetap |
| NIK | : | | Program Studi | : | Teknik Elektro |
| Jabatan Akademik | : | | | | |

| Bidang | Perincian Kegiatan | Tempat | Jam/ Minggu | Kinerja (sks) | Keterangan |
|---|---|---|---|---|---|
| I PENDIDIKAN Dan PENGAJARAN | **MENGAJAR DI KELAS ( KULIAH / RESPONSI DAN LABORATORIUM )** | | | | |
| | 1. Mekatronika (Kls K ) S1 Teknik Mesin)) | | | 3 | Sabtu, 08.00-10.40 |
| | 2. Mekatronika (Kls A ) S1 Teknik Mesin)) | | | 3 | Jumat, 08.00-09.40 |
| | 3. Prak.Pengukuran Besaran Listrik (K) | | | 1 | |
| | 4. Sistem Optimasi (K) | | | 3 | Sabtu, 13.00-15..30 |
| | 5. Estimasi & Identifikasi (A) | | | 2 | Selasa, 13.00-15.30 |
| | 6. Matematika Teknik 1 (K) | | | 3 | Sabtu, 19.00-21.00 |
| | 7. Sistem Kendali Optimal (A) | | | 3 | Senin, 15.00-16.50 |
| | 8. Sistem Optimasi (A) | | | 2 | Rabu, 15.40-17.20 |
| | 9. | | | | |
| | 10. | | | | |
| | 11. | | | | |
| | 12. | | | | |
| | 13 | | | | |
| | 14. | | | | |
| | 15. | | | | |
| | 16. | | | | |
| | 17. Membimbing Skripsi / Tugas Akhir | | | | |
| | 18. Menguji Skripsi / Tugas Akhir | | | | |
| II PENELITIAN | 1. Penelitian Ilmiah | | | | |
| | 2. Penulisan Karya Ilmiah | | | 1 | |
| | 3. Penulisan Diktat Kuliah | | | | |
| | 4. Menerjemahkan Buku | | | | |
| | 5. Pembuatan Rancangan Teknologi | | | | |
| | 6. Pembuatan Rancangan & Karya Pertunjukan | | | | |
| III PENGABDIAN DAN MASYARAKAT | 1. Menduduki Jabatan di Pemerintahan | | | | |
| | 2. Pengembangan Hasil Pendidikan Dan Penelitian | | | | |
| | 3. Memberikan Penyuluhan/Pelatihan/Ceramah pada masyarakat | | | | |
| | 4. Memberikan Pelayanan Kepada Masyarakat Umum | | | 1 | |
| | 5. Menulis Karya Pengabdian Pada Masyarakat yang tidak dipublikasikan | | | | |
| | 6. Komersial / Kesepakatan | | | | |
| IV UNSUR-UNSUR PENUNJANG | 1. Jabatan Struktural | | | 2 | |
| | 2. Penasehat Akademik | | | | |
| | 3. Berperan serta aktif dalam pertemuah ilmiah / seminar | | | 1 | |
| | 4. Pengembangan program kuliah / Kelompok Ilmu Elektro | | | | |
| | 5. Menjadi anggota panitia / Badan pada suatu Perguruan Tinggi | | | | |
| | 6. Menjadi anggota Badan Lembaga Pemerintah | | | | |
| | 7. Menjadi Anggota Organisasi Profesi | | | | |
| | 8. Mewakili PT / Lembaga Pemerintah duduk dalam Panitia antar Lembaga | | | | |
| | 9. Menjadi Anggota Delegasi Nasional ke Parlemen – Parlemen Internasional | | | | |
| | Jumlah Total | | | **25** | |

Kepada yang bersangkutan akan diberikan gaji / honorarium sesuai dengan peraturan penggajian yang berlaku di Institut Sains Dan Teknologi Nasional
Penugasan ini berlaku dari tanggal **25 September 2023** sampai dengan tanggal **31 Maret 2024.**

Jakarta, 3 Oktober 2023
Dekan,

FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI ISTN

**( Dr. Musfirah Cahya F.T.S.Si.,M.Si.)**

**Tembusan :**

1. Direktur Akademik – ISTN
2. Direktur Non Akademik – ISTN
3. Ka. Biro Sumber Daya Manusia – ISTN
4. Kepala Program Studi Fak. ....
5. Arsip

**BERITA ACARA PERKULIAHAN**
(PRESENTASI KEHADIRAN DOSEN)
SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 2023/2024
PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO S.1 & D.III –ISTN

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mata Kuliah | : | Matematika Teknik 1 | Semester | : | Ganjil |
| Dosen | : | M. Ikrar Yamin, ST, MTrT | SKS | : | 3 |
| Hari | : | Sabtu | Kelas | : | S1 P2K Teknik Elektro |
| Jam | : | 19.00 – 21.00 WIB | Ruang | : | Online |

| No. | TANGGAL | MATERI KULIAH | JML MHS HADIR | TANDA TANGAN DOSEN |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 7– 10 - 2023 | Uraian rencana pembelajaran, objek materi, dan tata tertib perkuliahan Matematika Teknik I | 8 | |
| 2. | 14 – 10- 2023 | Sistem Bilangan, bilangan rasional dan irasional, bilangan nyata. interval, harga mutlahdan sifat-sifatnya, pemecahan persamaan dan pertidaksamaan, persamaan kuadrat, akar-akar persamaan kuadrat, kordinat kartesius, mencari jarak, mencari titik tengah antara dua titik | 8 | |
| 3. | 21 - 10 - 2023 | Garis lurus, kemiringan dari suatu garis lurus, persamaan garis yang melalui satu titik dan mempunyai " slope m " dan tegak lurus pada garis lain , persamaan garis dengan " slope m" dan sejajar garis lain, fungsi satu variabel dan operasinya, fungsi inverrs | 8 | |
| 4. | 28 – 10 - 2023 | Fungsi linier dan operasinya, fungsi parabola, fungsi hyperbola, lingkaran, ellips, fungsi trigonometri dan grafiknya, fungsi hyperbolicus dan grafiknya | 8 | |
| 5. | 4– 11 - 2023 | Definisi limit, limit kanan, limit kiri, Limit fungsi aljabar dan penyelesaiannya, penyelesaian limit dengan metode pemfaktoran, mengeluarkan variable dengan pangkat tertinggi, merasionalkan, dan metode permisalan | 8 | |
| 6. | 11 – 11 - 2023 | Penyelesaian limit fungsi trigonometri, limit bilangan e, Limit fungsi logarithma, kontinuitas suatu fungsi | 8 | |
| 7. | 18 - 11 - 2023 | Definisi turunan dari suatu fungsi, beberapa notasi turunan, turunan fungsi aljabar, fungsi trasenden,<br>fungsi majemuk | 8 | |
| 8. | 25 - 11 -2023 | **Ujian Tengah Semester** | 8 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9. | 28-11-2023 | Konsep dasar Differensial | 5 | |
| 10. | 5-12-2023 | Turunan Fungsi Trigonometri | 5 | |
| 11. | 12-12-2023 | Aturan Perkalian dan Pembagian Turunan Trigonometri | 5 | |
| 12. | 19-12-2023 | Aturan Rantai Turunan Trigonometri | 5 | |
| 13. | 30-12-2023 | Turunan Fungsi Implisit | 5 | |
| 14. | 6-1-2024 | Aplikasi Turunan 1 | 5 | |
| 15. | 9-1-2024 | Aplikasi Turunan 2, Fungsi dan Integral | 5 | |
| 16. | 13-1-2024 | Ujian Akhir Semester | 5 | |

Dosen Pengajar

(M. Ikrar Yamin, ST., MTr.T)

# DAFTAR NILAI

## SEMESTER GANJIL REGULER TAHUN 2023/2024

Program Studi : Teknik Elektro S1
Matakuliah : Matematika Teknik 1
Kelas / Peserta : K
Perkuliahan : Kampus ISTN Bumi Srengseng P2K - Kelas
Dosen : Harlan Effendi, ST.MT.



| No | NIM | N A M A | ABSEN | TUGAS | UTS | UAS | MODEL | PRESENTASI | NA | HURUF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 10% | 20% | 30% | 40% | 0% | 0% | | |
| 1 | 23224001 | **Rkin Jumadi** | 100 | 100 | 71 | 75 | 0 | 0 | 81.3 | **A** |
| 2 | 23224002 | **Pajar Dewantoro** | 100 | 80 | 70 | 56 | 0 | 0 | 69.4 | **B** |
| 3 | 23224003 | **Aditia Putra Hamid** | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 23224004 | **Mario Yudhiano** | 100 | 0 | 68 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5 | 23224005 | **Bagas Dwi Prasetyo** | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | 23224006 | **Madona Eko Prihantoro** | 100 | 0 | 78 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 7 | 23224007 | **Raju Al Ghifari** | 100 | 0 | 68 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 8 | 23224008 | **Michael Steven Simanjuntak** | 81 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

| Rekapitulasi Nilai | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | B+ | 0 | C+ | 0 | D+ | 0 |
| A- | 0 | B | 1 | C | 0 | D | 0 |
| | | B- | 0 | C- | 0 | E | 0 |

Jakarta,28 February 2024

Dosen Pengajar

M. Ikrar Yamin, ST., MTrT.

# TURUNAN

**Muhammad Ikrar Yamin, ST. ,MTrT.**

# Konsep Turunan

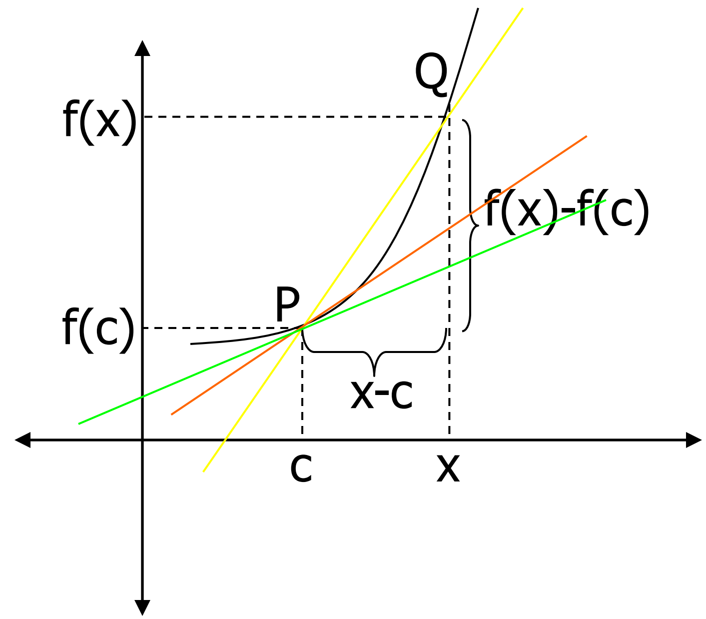
## 1 Turunan di satu titik

Pendahuluan ( dua masalah dalam satu tema )

**a. Garis Singgung**

Kemiringan tali busur *PQ* adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



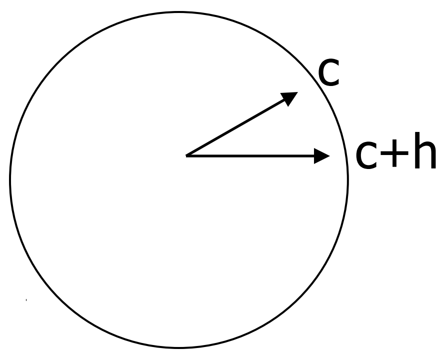

Jika $x \rightarrow c$, maka tali busur *PQ* akan berubah menjadi garis singgung di ttk *P* dgn kemiringan

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

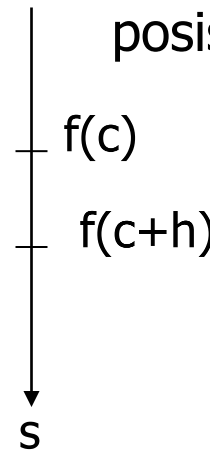
- **b. Kecepatan Sesaat**

  Misal sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $t = c$ benda berada di $f(c)$ dan saat $t = c + h$ benda berada di $f(c+h)$.

Perubahan waktu




Perubahan posisi




- Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu $[c, c+h]$ adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika h $\rightarrow$ 0, diperoleh kecepatan sesaat di $x = c$ :

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misal x = c + h, bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$$v = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dari dua bentuk diatas : kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat terlihat bahwa dua masalah tersebut berada dalam satu tema, yaitu turunan

**Definisi** : Turunan pertama fungsi *f* di titik $x = c$, notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit diatas ada

Notasi lain :

$\dot{y}, \frac{dy}{dx}$ $\frac{df(c)}{dx}, y'(c)$

Contoh : Diketahui $f(x)=\frac{1}{x}$ tentukan $f'(3)$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{3x(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{3x}=-\frac{1}{9}$$

## 4.1.2 Turunan Sepihak

Turunan kiri dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi *f* dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di *c* atau $f'(c)$ ada, jika

$$f'_-(c) = f'_+(c) \quad \text{dan} \quad f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$$

sebaliknya *f* dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

**Contoh** : Diketahui $$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$

Jika ya, tentukan $f'(1)$

**Jawab :**

a. $$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

b. $$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x-1} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, $f$ diferensiabel di $x=1$ dan $f'(1) = 1$.

- **Teorema** Jika *f* diferensiabel di *c* ➔ *f* kontinu di *c*.
- **Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Perhatikan bahwa $f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) \quad , \quad x \neq c$

- Maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}\left[ f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \right]$$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.\lim_{x \to c}(x - c)$$

$$= f(c) + f'(c).0 \qquad = f(c). \qquad \text{Terbukti.}$$

- Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika *f* kontinu di *c*, maka belum tentu *f* diferensiabel di *c*. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

**Contoh** Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tetapi tidak diferensiabel di $x = 0$

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa f(x)=|x| kontinu di x=0

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

- f(0) = 0
- $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$
- $$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

**f kontinu di x=0**

Selidiki apakah f terdiferensialkan di x=0

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Karena $-1 = f_-'(0) \neq f_+'(0) = 1$

**maka *f* tidak diferensiabel di 0.**

**Contoh**: Tentukan konstanta *a* dan *b* agar fungsi f(x) berikut diferensiabel di *x*=1 ;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b \ , & x < 1 \\ ax \ , & x \geq 1 \end{cases}$$

Jawab : Agar f(x) terdiferensialkan di *x* = 1, haruslah

a. f kontinu di *x* = 1 (syarat perlu)

b. Turunan kiri = turunan kanan di *x* = 1 (syarat cukup)

f kontinu di *x* = 1 jika f kontinu kiri dan kontinu kanan di *x* = 1 atau

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

$$a = \lim_{x \to 1} x^2 + b = \lim_{x \to 1} ax \iff a = 1 + b = a \iff b = a - 1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+b-a}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(a-1)-a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{x-1}=a\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=a$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2$$

Maka diperoleh : $a$ = 2 dan $b$ = 1.

## Soal Latihan

Tentukan nilai *a* dan *b* agar fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan.

1. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ; x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$ , $x = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x < 3 \\ 2ax + b & ; x \geq 3 \end{cases}$ , $x = 3$

3. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ; 0 \leq x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \geq 1 \end{cases}$ , $x = 1$

# 4.2 Aturan Pencarian Turunan

- Fungsi Turunan Pertama

- **Definisi 4.2** Misalkan *f* (*x*) terdefinisi pada selang *I*. Fungsi turunan pertama dari *f*, ditulis $f'(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \;,\; \forall x \in \mathrm{I}$$

- atau jika *h*=*t*-*x*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;,\; \forall x \in \mathrm{I}$$

bila limitnya ada.

- Notasi lain $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$, bentuk $\frac{dy}{dx}$ dikenal

sebagai notasi **Leibniz.**

- Dengan menggunakan definisi tersebut dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika $f(x)$=k, maka $f'(x) = 0$
2. $\dfrac{d\left(x^r\right)}{dx} = r x^{r-1}; \; r \in R$
3. $\dfrac{d\left(f(x) \pm g(x)\right)}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$
4. $\dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx} = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
5. $\dfrac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$.

Misal h(x) = f(x)g(x)

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} \qquad = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Contoh

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

   Jawab :

   $$f'(x) = 3x^2 + 3.2x + 0 = 3x^2 + 6x$$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 + 2x + 3)$

   Jawab :

   $$f'(x) = 3x^2(x^2 + 2x + 3) + (x^3 + 1)(2x + 2)$$

   $$= 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x^4 + 2x^3 + 2x + 2$$

   $$= 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2$$

3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$

   Jawab :

   $$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x(x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 6x - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $$f(x) = x^{1/2} + \sqrt[3]{x^2} + 1$$

2. $$f(x) = (x+1)(x^3 + 2x + 1)$$

3. $$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

4. $$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

5. $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

# 4.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

$$a.\ f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$b.\ f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

Bukti:

a. Misal f(x) = sin x maka

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{2\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \to x} \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) . \lim_{\frac{t-x}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$$= \cos x . 1 = \cos x.$$

b. Misal f(x) = cos x maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\ \cosh - \sin\ x \sinh - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cosh - 1) - \sin\ x \sinh}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(-\sin^2\frac{h}{2})}{h} - \sin\ x\frac{\sinh}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\ (-\sin^2\frac{h}{2})h}{(h/2)^2 4} - \sin\ x\frac{\sinh}{h}\right) = \cos x \lim_{(h/2)\to 0} -\left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)^2\frac{h}{4} - \sin\ x \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$

$$= \cos x .0 - \sin\ x = -\sin\ x$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, khususnya turunan bentuk u/v

$$c.\ \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\sin x / \cos x\right)}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d.\ \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\cos x / \sin x\right)}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$e.\ \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(1 / \cos x\right)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

$$f.\ \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(1 / \sin x\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

## 4.4 Aturan Rantai

- Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada , maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sin(x^2 + 1)$

Jawab :

Misal $u = x^2 + 1$ sehingga bentuk diatas menjadi $y = \sin u$

Karena

$$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ dan } \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1)\, 2x = 2x\cos(x^2 + 1)$$

Jika y = f(u), u = g(v), v = h(x), dan $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dv}, \frac{dv}{dx}$ Ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = Sin^4(x^3 + 5)$

Jawab :

Misal $v = x^3 + 5 \longrightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

$u = Sin\ v \longrightarrow \frac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$

$y = u^4 \longrightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 = 4Sin^3(x^3 + 5)$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 12x^2\, Sin^3(x^3 + 5)\, Cos(x^3 + 5)$$

- Contoh : Tentukan $f'(x^2) \quad jika \quad \frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1, x \neq 0$

jawab :

$$\frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1 \qquad \Leftrightarrow \quad f'(x^2).2x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{x^2+1}{2x}$$

## Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

2. $y = (2x - 3)^{10}$

3. $y = \sin^3 x$

4. $y = \cos^4 (4x^2 - x)$

5. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

6. $y = \sin x \ \tan [x^2 + 1]$

Tentukan $f'(\cos(x^2))$,

jika $\dfrac{d(f(\cos(x^2))}{dx} = (2x - 3)^{10}$

# 4.5 Turunan Tingkat Tinggi

- Turunan ke-*n* didapatkan dari penurunan turunan ke-(*n*-1).

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right)$$

- Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
- Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
- Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$
- Turunan ke-n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$
- **Contoh** : Tentukan $y''$ dari $y = 4x^3 + \sin x$
- **Jawab** :

$$y' = 12x^2 + \cos x \qquad maka\ y'' = 24x - \sin x$$

## Soal Latihan

A. Tentukan turunan kedua dari

1. $y = \sin(2x-1)$

2. $y = (2x-3)^4$

3. $y = \dfrac{x}{x+1}$

4. $y = \cos^2(\pi x)$

B. Tentukan nilai *c* sehingga $f''(c) = 0$ bila $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$

C. Tentukan nilai *a, b* dan *c* dari $g(x) = ax^2 + bx + c$ bila $g(1) = 5$,

$g'(1) = 3$ dan $g''(1) = -4$

# 4.6 Turunan Fungsi Implisit

- Jika hubungan antara *y* dan *x* dapat dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan ***y* fungsi implisit dari *x***.

Contoh :

$$1.\ x^3y^2 + x^2 + y = 10$$

$$2.\ \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

- Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap *y* fungsi dari *x*.

## Tentukan dy/dx dari bentuk implisit berikut

$$1.\ x^3y^2 + x^2 + y = 10 \qquad 2.\ \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

Jawab

$$1.\ D_x(x^3y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$$

$$D_x(x^3y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$$

$$(3x^2y^2 + 2x^3y\,y') + 2x + y' = 0$$

$$(2x^3y + 1)y' = -2x - 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{-2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 1}$$

$$2.\ D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$$

$$\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$$

$$(x\cos(xy) - 2y)y' = -2x - y\cos(xy)$$

$$y' = \frac{-2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 2y}$$

## Soal Latihan

Tentukan turunan pertama ( $y'$ ) dari bentuk implisit

1. $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$
2. $y + \sin(xy) = 1$
3. *tan ( x y ) - 2 y = 0*
4. $x^2 \sin(xy) + y = x$

## 4.7 Garis singgung dan garis normal

- Persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik $(x_0, y_0)$ dengan kemiringan *m* adalah

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0).}$$

- Garis yang tegak lurus dengan garis singgung disebut dengan garis normal.
- Persamaan garis normal di titik $(x_0, y_0)$ adalah

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).\ ,\ m \neq 0$$

$m = 0$

gs $y = y_0$

gn $x = x_0$

**Contoh:** Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal

fungsi $y = x^3 - 2x^2 + 6$ di (2,6).

$y = (x-3)^3 - 3x$ di $x = 2$

Jawab : $y' = 3x^2 - 4x \rightarrow y'(2,6) = 3.2^2 - 4.2 = 4$

Sehingga persamaan garis singgung di titik (2,6) :

$$y - 6 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 2$$

Persamaan garis normal dititik (2,6) :

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y - 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva

$x^2 y^2 - xy - 6 = 0$ di titik dengan absis( x) = 1

Jawab :

Jika disubstitusikan nilai x = 1 pada persamaan kurva diperoleh

$y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2) = 0$ $y$ = 3 dan $y$ = -2

Sehingga diperoleh titik dimana akan ditentukan persamaan garis singgung dan garis normalnya adalah (1,3) dan (1,-2)

Hitung terlebih dahulu $y'$ dengan menggunakan turunan fungsi implisit

$$D_x(x^2 y^2 - xy - 6) = D_x(0) \Leftrightarrow 2xy^2 + 2x^2 yy' - (y + xy') - 0 = 0$$

$$2xy^2 + 2x^2 yy' - y - xy' = 0$$

$$(2x^2y - x)y' = y - 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2xy^2}{2x^2y - x}$$

Di titik (1,3)

$$y'|_{(1,3)} = \frac{3 - 2.1.9}{2.1.3 - 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

Persamaan garis singgung

$$y - 3 = -3(x - 1) = -3x + 3$$

$$3x + y = 6$$

Persamaan garis normal

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x - 3y = -8$$

Di titik (1,-2)

$$y'|_{(1,-2)} = \frac{-2-2.1.4}{2.1.(-2)-1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Persamaan garis singgung

$$y+2 = 2(x-1) = 2x-2$$

$$2x - y = 4$$

Persamaan garis normal

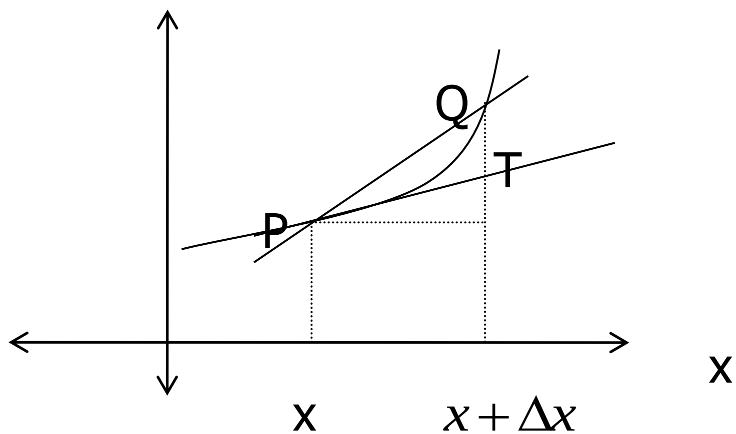
$$y+2 = -\frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x + 2y = -3$$

# 4.8 Diferensial dan Hampiran

- **4.8.1 Diferensial**
- Jika $f'(x)$ ada, maka $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.




Untuk $\Delta x$ sangat kecil , maka $m_{PQ} = m_{PT}$ yakni , $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ , $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

- **Definisi 4.4** Jika $y = f(x)$ diferensiabel di $x$, maka
  Diferensial dari $x$ , dinyatakan dengan $dx$, adalah $dx = \Delta x$
  Diferensial dari $y$ , dinyatakan dengan $dy$, adalah $dy = f'(x)dx$

## 4.8.2 Hampiran

- Perhatikan kembali gambar sebelumnya,
- Misalkan $y = f(x)$ diferensiabel di interval I yang memuat $x$ dan $x + \Delta x$. Jika $x$ ditambah $\Delta x$, maka $y$ bertambah sepadan dengan $\Delta y$ yang dapat dihampiri oleh $dy$ .
- Jadi , $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$ (*)
- **Contoh :** Hampiri $\sqrt[3]{28}$
- **Jawab** : Pandang, $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(27) = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$$

Dengan pers (*)

$$f(28) \approx f(27) + f'(27)(28-27) = 3\frac{1}{27}.$$

## Soal Latihan

1. Diketahui kurva yang dinyatakan secara implisit

$$y + \sin(xy) = 1$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal di $(\pi, 1)$

2. Gunakan diferensial untuk menghampiri

   a. $\sqrt{10}$

   b. $\sqrt{33}$

3. Jika diketahui $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$ , $g'(0) = 3$ tentukan $(f \circ g)'(0)$.