

BIDANG PENDIDIKAN DAN PENGAJARAN
BERITA ACARA PERKULIAHAN
KULIAH ONLINE(*E-LEARNING*)

PERIODE SEMESTER GANJIL 2023-2024

MATA KULIAH:

MATEMATIKA TEKNIK 1

LAMPIRAN BERITA ACARA PERKULIAHAN :

- 1. SK.DEKAN FTI SEMESTER GANJIL 2023/2024*
- 2. PRESENSI KEHADIRAN DOSEN DAN MATERI AJAR*
- 3. CONTOH HAND OUT MATERI AJAR*
- 4. NILAI KOMULATIF; KEHADIRAN, TUGAS, UTS DAN UAS*

PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO
FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI
INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL



YAYASAN PERGURUAN CIKINI
INSTITUT SAINS DAN TEKNOLOGI NASIONAL

Jl. Moh. Kahfi II, Bhumi Srengseng Indah, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12640
Telp. 021-7270090 (hunting), Fax. 021-7866955, hp: 081291030024
Email : humas@istn.ac.id Website : www.istn.ac.id

SURAT PENUGASAN TENAGA PENDIDIK

Nomor : 287/03.1 - G / IX / 2023

SEMESTER **GANJIL**, TAHUN AKADEMIK 2023 / 2024

Nama	: M. Ikrar Yamin, ST.MTrT	Status Pegawai	: Edukatif Tetap		
NIK	:	Program Studi	: Teknik Elektro		
Jabatan Akademik	:				
Bidang	Perincian Kegiatan	Tempat	Jam/ Minggu	Kinerja (sks)	Keterangan
I PENDIDIKAN Dan PENGAJARAN	MENGAJAR DI KELAS (KULIAH / RESPONSI DAN LABORATORIUM)				
	1. Mekatronika (Kls K) S1 Teknik Mesin))			3	Sabtu, 08.00-10.40
	2. Mekatronika (Kls A) S1 Teknik Mesin))			3	Jumat, 08.00-09.40
	3. Prak.Pengukuran Besaran Listrik (K)			1	
	4. Sistem Optimasi (K)			3	Sabtu, 13.00-15.30
	5. Estimasi & Identifikasi (A)			2	Selasa, 13.00-15.30
	6. Matematika Teknik 1 (K)			3	Sabtu, 19.00-21.00
	7. Sistem Kendali Optimal (A)			3	Senin, 15.00-16.50
	8. Sistem Optimasi (A)			2	Rabu, 15.40-17.20
	9.				
	10.				
	11.				
	12.				
	13.				
	14.				
	15.				
	16.				
	17. Membimbing Skripsi / Tugas Akhir				
18. Menguji Skripsi / Tugas Akhir					
II PENELITIAN	1. Penelitian Ilmiah			1	
	2. Penulisan Karya Ilmiah				
	3. Penulisan Diktat Kuliah				
	4. Menerjemahkan Buku				
	5. Pembuatan Rancangan Teknologi				
	6. Pembuatan Rancangan & Karya Pertunjukan				
III PENGABDIAN DAN MASYARAKAT	1. Menduduki Jabatan di Pemerintahan				
	2. Pengembangan Hasil Pendidikan Dan Penelitian				
	3. Memberikan Penyuluhan/Pelatihan/Ceramah pada masyarakat				
	4. Memberikan Pelayanan Kepada Masyarakat Umum				1
	5. Menulis Karya Pengabdian Pada Masyarakat yang tidak dipublikasikan				
	6. Komersial / Kesepakatan				
IV UNSUR-UNSUR PENUNJANG	1. Jabatan Struktural			2	
	2. Penasehat Akademik				
	3. Berperan serta aktif dalam pertemuan ilmiah / seminar				1
	4. Pengembangan program kuliah / Kelompok Ilmu Elektro				
	5. Menjadi anggota panitia / Badan pada suatu Perguruan Tinggi				
	6. Menjadi anggota Badan Lembaga Pemerintah				
	7. Menjadi Anggota Organisasi Profesi				
	8. Mewakili PT / Lembaga Pemerintah duduk dalam Panitia antar Lembaga				
	9. Menjadi Anggota Delegasi Nasional ke Parlemen - Parlemen Internasional				
Jumlah Total				25	

Kepada yang bersangkutan akan diberikan gaji / honorarium sesuai dengan peraturan penggajian yang berlaku di Institut Sains dan Teknologi Nasional
Penugasan ini berlaku dari tanggal 25 September 2023 sampai dengan tanggal 31 Maret 2024.



Jakarta, 3 Oktober 2023
Dekan,

(Signature)

(Dr. Musfirah Cahya F.T.S.Si.,M.Si.)

Tembusan :


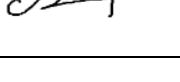
1. Direktur Akademik - ISTN
2. Direktur Non Akademik - ISTN
3. Ka. Biro Sumber Daya Manusia - ISTN
4. Kepala Program Studi Fak.
5. Arsip



BERITA ACARA PERKULIAHAN
(PRESENTASI KEHADIRAN DOSEN)
SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 2023/2024
PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO S.1 & D.III –ISTN

Mata Kuliah : Matematika Teknik 1	Semester : Ganjil
Dosen : M. Ikrar Yamin, ST, MTrT	SKS : 3
Hari : Sabtu	Kelas : S1 P2K Teknik Elektro
Jam : 19.00 – 21.00 WIB	Ruang : Online

No.	TANGGAL	MATERI KULIAH	JML MHS HADIR	TANDA TANGAN DOSEN
1.	7- 10 - 2023	Uraian rencana pembelajaran, objek materi, dan tata tertib perkuliahan Matematika Teknik I	8	
2.	14 - 10- 2023	Sistem Bilangan, bilangan rasional dan irasional, bilangan nyata. interval, harga mutlahdan sifat-sifatnya, pemecahan persamaan dan pertidaksamaan, persamaan kuadrat, akar-akar persamaan kuadrat, kordinat kartesius, mencari jarak, mencari titik tengah antara dua titik	8	
3.	21 - 10 - 2023	Garis lurus, kemiringan dari suatu garis lurus, persamaan garis yang melalui satu titik dan mempunyai " slope m " dan tegak lurus pada garis lain , persamaan garis dengan " slope m" dan sejajar garis lain, fungsi satu variabel dan operasinya, fungsi inverts	8	
4.	28 - 10 - 2023	Fungsi linier dan operasinya, fungsi parabola, fungsi hyperbola, lingkaran, ellips, fungsi trigonometri dan grafiknya, fungsi hyperbolicus dan grafiknya	8	
5.	4- 11 - 2023	Definisi limit, limit kanan, limit kiri, Limit fungsi aljabar dan penyelesaiannya, penyelesaian limit dengan metode pefaktorran, mengeluarkan variable dengan pangkat tertinggi, merasionalkan, dan metode permisalan	8	
6.	11 - 11 - 2023	Penyelesaian limit fungsi trigonometri, limit bilangan e, Limit fungsi logaritmha, kontinuitas suatu fungsi	8	
7.	18 - 11 - 2023	Definisi turunan dari suatu fungsi, beberapa notasi turunan, turunan fungsi aljabar, fungsi trasenden, fungsi majemuk	8	
8.	25 - 11 -2023	Ujian Tengah Semester	8	

9.	28-11-2023	Konsep dasar Differensial	5	
10.	5-12-2023	Turunan Fungsi Trigonometri	5	
11.	12-12-2023	Aturan Perkalian dan Pembagian Turunan Trigonometri	5	
12.	19-12-2023	Aturan Rantai Turunan Trigonometri	5	
13.	30-12-2023	Turunan Fungsi Implisit	5	
14.	6-1-2024	Aplikasi Turunan 1	5	
15.	9-1-2024	Aplikasi Turunan 2, Fungsi dan Integral	5	
16.	13-1-2024	Ujian Akhir Semester	5	

Dosen Pengajar



(M. Ikrar Yamin, ST., MTr.T)

DAFTAR NILAI
SEMESTER GANJIL REGULER TAHUN 2023/2024

Program Studi : Teknik Elektro S1
Matakuliah : Matematika Teknik 1
Kelas / Peserta : K
Perkuliahan : Kampus ISTN Bumi Srengseng P2K - Kelas
Dosen : Muhammad Ikrar Yamin, ST. MT.

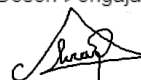
Hal. 1/1

No	NIM	N A M A	ABSEN	TUGAS	UTS	UAS	MODEL	PRESENTASI	NA	HURUF
			10%	20%	30%	40%	0%	0%		
1	23224001	Rkin Jumadi	100	100	71	75	0	0	81.3	A
2	23224002	Pajar Dewantoro	100	80	70	56	0	0	69.4	B
3	23224003	Aditia Putra Hamid	100	0	0	0	0	0	0	
4	23224004	Mario Yudhiano	100	0	68	0	0	0	0	
5	23224005	Bagas Dwi Prasetyo	100	0	0	0	0	0	0	
6	23224006	Madona Eko Prihantoro	100	0	78	0	0	0	0	
7	23224007	Raju Al Ghifari	100	0	68	0	0	0	0	
8	23224008	Michael Steven Simanjuntak	81	0	0	0	0	0	0	

Rekapitulasi Nilai							
A	1	B+	0	C+	0	D+	0
A-	0	B	1	C	0	D	0
		B-	0	C-	0	E	0

Jakarta, 28 February 2024

Dosen Pengajar



M. Ikrar Yamin, ST., MTrT.



TURUNAN

Muhammad Ikrar Yamin, ST. ,MTrT.

Konsep Turunan

1 Turunan di satu titik

Pendahuluan (dua masalah dalam satu tema)

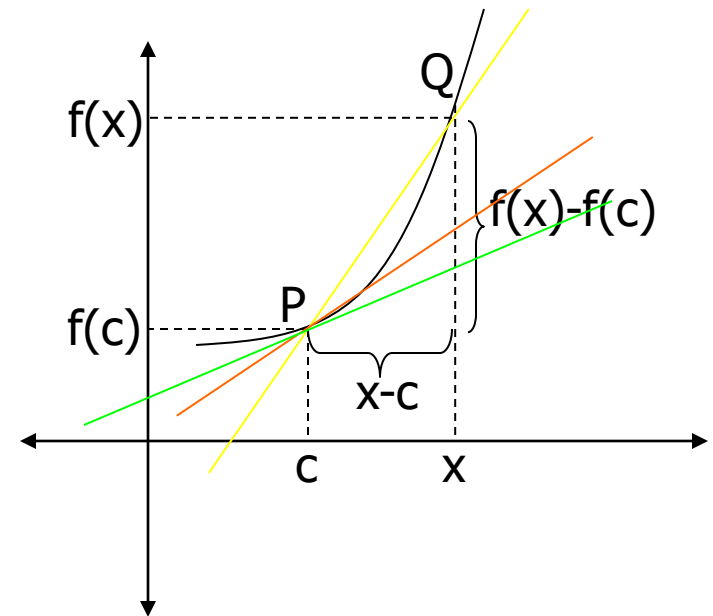
a. Garis Singgung

Kemiringan tali busur PQ adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

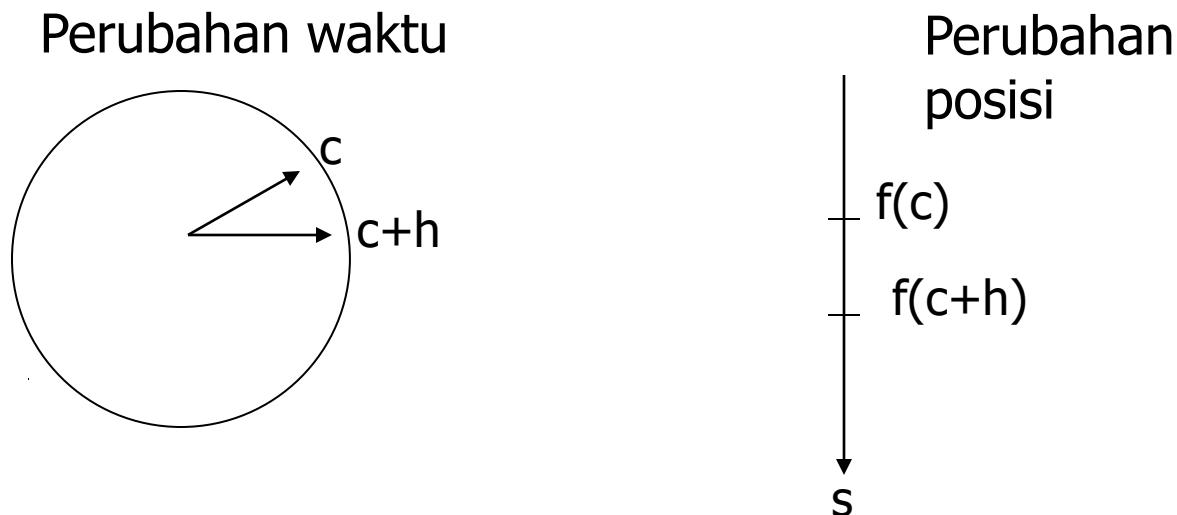
Jika $x \rightarrow c$, maka tali busur PQ akan berubah menjadi garis singgung di titik P dgn kemiringan

$$m = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



- **b. Kecepatan Sesaat**

Misal sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $t = c$ benda berada di $f(c)$ dan saat $t = c + h$ benda berada di $f(c+h)$.



- Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu $[c, c+h]$ adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika $h \rightarrow 0$, diperoleh kecepatan sesaat di $x = c$:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misal $x = c + h$, bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$$v = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dari dua bentuk diatas : kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat terlihat bahwa dua masalah tersebut berada dalam satu tema, yaitu turunan

Definisi : Turunan pertama fungsi f di titik $x = c$, notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit diatas ada

Notasi lain :

$$\dot{y}, \frac{dy}{dx} \quad \frac{df(c)}{dx}, y'(c)$$

Contoh : Diketahui $f(x) = \frac{1}{x}$ tentukan $f'(3)$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{3x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)}{3x(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

4.1.2 Turunan Sepihak

Turunan kiri dari fungsi f di titik c , didefinisikan sebagai :

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi f di titik c , didefinisikan sebagai :

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di c atau $f'(c)$ ada, jika

$$f'_-(c) = f'_+(c) \quad \text{dan} \quad f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$$

sebaliknya f dikatakan tidak mempunyai turunan di c .

Contoh : Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$

Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$

Jika ya, tentukan $f'(1)$

Jawab :

a.
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

b.
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, f diferensiabel di $x=1$ dan $f'(1) = 1$.

□ **Teorema** Jika f diferensiabel di $c \rightarrow f$ kontinu di c .

□ **Bukti** : Yang perlu ditunjukkan adalah

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

□ Perhatikan bahwa $f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)$, $x \neq c$

□ Maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c). \quad \text{Terbukti.} \end{aligned}$$

□ Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika f kontinu di c , maka belum tentu f diferensiabel di c . Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tetapi tidak diferensiabel di $x = 0$

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

□ $f(0) = 0$

□
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

□
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

f kontinu di $x = 0$

Selidiki apakah f terdiferensialkan di $x=0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Karena $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$

maka f tidak diferensiabel di 0.

Contoh: Tentukan konstanta a dan b agar fungsi $f(x)$ berikut diferensiabel di $x=1$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b, & x < 1 \\ ax, & x \geq 1 \end{cases}$$

Jawab : Agar $f(x)$ terdiferensialkan di $x = 1$, haruslah

a. f kontinu di $x = 1$ (syarat perlu)

b. Turunan kiri = turunan kanan di $x = 1$ (syarat cukup)

f kontinu di $x = 1$ jika f kontinu kiri dan kontinu kanan di $x = 1$ atau

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + b = \lim_{x \rightarrow 1} ax \Leftrightarrow a = 1 + b = a \Leftrightarrow b = a - 1$$

$$\begin{aligned}
 f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + b - a}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a - 1) - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2
 \end{aligned}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - a}{x - 1} = a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = a$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 2$$

Maka diperoleh : $a = 2$ dan $b = 1$.

Soal Latihan

Tentukan nilai a dan b agar fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} ax - b & ; x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \geq 2 \end{cases} \quad , x = 2$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x < 3 \\ 2ax + b & ; x \geq 3 \end{cases} \quad , x = 3$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ; 0 \leq x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \geq 1 \end{cases} \quad , x = 1$$

4.2 Aturan Pencarian Turunan

- Fungsi Turunan Pertama

- **Definisi 4.2** Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada selang I . Fungsi turunan pertama dari f , ditulis $f'(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad \forall x \in I$$

- atau jika $h=t-x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \forall x \in I$$

bila limitnya ada.

- Notasi lain y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $D_x y$, $D_x f(x)$, bentuk $\frac{dy}{dx}$ dikenal

sebagai notasi **Leibniz**.

- Dengan menggunakan definisi tersebut dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika $f(x)=k$, maka $f'(x) = 0$

2. $\frac{d(x^r)}{dx} = rx^{r-1}; r \in R$

3. $\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$

4. $\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

5. $\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$.

Misal $h(x) = f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Contoh

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

Jawab :

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x + 0 = 3x^2 + 6x$$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 + 2x + 3)$

Jawab :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x^2 + 2x + 3) + (x^3 + 1)(2x + 2) \\ &= 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x^4 + 2x^3 + 2x + 2 \\ &= 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x(x + 3)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 6x - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

$$1. \quad f(x) = x^{1/2} + \sqrt[3]{x^2} + 1$$

$$2. \quad f(x) = (x+1)(x^3 + 2x + 1)$$

$$3. \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$4. \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$5. \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

4.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

a. $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

b. $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

Bukti:

a. Misal $f(x) = \sin x$ maka

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{2 \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) \sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) \cdot \lim_{\frac{t-x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$$= \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

b. Misal $f(x) = \cos x$ maka

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cosh - 1) - \sin x \sinh}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \left(-\sin^2 \frac{h}{2}\right) h}{h} - \sin x \frac{\sinh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x \left(-\sin^2 \frac{h}{2}\right) h}{(h/2)^2 4} - \sin x \frac{\sinh}{h} \right) &= \cos x \lim_{(h/2) \rightarrow 0} - \left(\frac{\sin(h/2)}{h/2} \right)^2 \frac{h}{4} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \\
 &= \cos x \cdot 0 - \sin x = -\sin x
 \end{aligned}$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, khususnya turunan bentuk u/v

$$c. \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d. \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$e. \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

$$f. \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

4.4 Aturan Rantai

- Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada, maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sin(x^2 + 1)$

Jawab :

Misal $u = x^2 + 1$ sehingga bentuk diatas menjadi $y = \sin u$

Karena

$$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ dan } \frac{du}{dx} = 2x$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1) 2x = 2x \cos(x^2 + 1)$$

Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$, dan $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dv}, \frac{dv}{dx}$ Ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \text{Sin}^4(x^3 + 5)$

Jawab :

Misal $v = x^3 + 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

$$u = \text{Sin } v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$$

$$y = u^4 \rightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 = 4\text{Sin}^3(x^3 + 5)$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 12x^2 \text{Sin}^3(x^3 + 5) \text{Cos}(x^3 + 5)$$

- Contoh : Tentukan

$$f'(x^2) \text{ jika } \frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1, x \neq 0$$

jawab :

$$\frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x^2) \cdot 2x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

2. $y = (2x - 3)^{10}$

3. $y = \sin^3 x$

4. $y = \cos^4(4x^2 - x)$

5. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

6. $y = \sin x \tan [x^2 + 1]$

Tentukan $f'(\cos(x^2))$,

jika $\frac{d(f(\cos(x^2)))}{dx} = (2x - 3)^{10}$

4.5 Turunan Tingkat Tinggi

- Turunan ke- n didapatkan dari penurunan turunan ke- $(n-1)$.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left(f^{(n-1)}(x) \right)$$

- Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

- Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

- Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

- Turunan ke- n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$

- **Contoh** : Tentukan y'' dari $y = 4x^3 + \sin x$

- **Jawab** :

$$y' = 12x^2 + \cos x \quad \text{maka } y'' = 24x - \sin x$$

Soal Latihan

A. Tentukan turunan kedua dari

1. $y = \sin(2x - 1)$

2. $y = (2x - 3)^4$

3. $y = \frac{x}{x + 1}$

4. $y = \cos^2(\pi x)$

B. Tentukan nilai c sehingga $f''(c) = 0$ bila $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$

C. Tentukan nilai a , b dan c dari $g(x) = ax^2 + bx + c$ bila $g(1) = 5$,
 $g'(1) = 3$ dan $g''(1) = -4$

4.6 Turunan Fungsi Implisit

- Jika hubungan antara y dan x dapat dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x , yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan **y fungsi implisit dari x** .

Contoh :

$$1. x^3 y^2 + x^2 + y = 10$$

$$2. \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

- Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap y fungsi dari x .

Tentukan dy/dx dari bentuk implisit berikut

$$1. x^3 y^2 + x^2 + y = 10 \quad 2. \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

Jawab

$$1. D_x(x^3 y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$$

$$D_x(x^3 y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$$

$$(3x^2 y^2 + 2x^3 y y') + 2x + y' = 0$$

$$(2x^3 y + 1)y' = -2x - 3x^2 y^2$$

$$y' = \frac{-2x - 3x^2 y^2}{2x^3 y + 1}$$

$$2. D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$$

$$\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$$

$$(x \cos(xy) - 2y)y' = -2x - y \cos(xy)$$

$$y' = \frac{-2x - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 2y}$$

Soal Latihan

Tentukan turunan pertama (y') dari bentuk implisit

1. $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$

2. $y + \sin(xy) = 1$

3. $\tan(xy) - 2y = 0$

4. $x^2 \sin(xy) + y = x$

4.7 Garis singgung dan garis normal

- Persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik (x_0, y_0) dengan kemiringan m adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

- Garis yang tegak lurus dengan garis singgung disebut dengan garis normal.
- Persamaan garis normal di titik (x_0, y_0) adalah

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0), \quad m \neq 0 \quad \left| \begin{array}{l} m = 0 \\ \text{gs } y = y_0 \\ \text{gn } x = x_0 \end{array} \right.$$

Contoh: Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal

fungsi $y = x^3 - 2x^2 + 6$ di $(2,6)$.

Jawab : $y = (x-3)^3 - 3x$ di $x=2$
 $y' = 3x^2 - 4x \rightarrow y'(2,6) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$

Sehingga persamaan garis singgung di titik $(2,6)$:

$$y - 6 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 2$$

Persamaan garis normal dititik $(2,6)$:

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y - 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva

$$x^2 y^2 - xy - 6 = 0 \quad \text{di titik dengan absis}(x) = 1$$

Jawab :

Jika disubstitusikan nilai $x = 1$ pada persamaan kurva diperoleh

$$y^2 - y - 6 = 0 \iff (y - 3)(y + 2) = 0 \quad y = 3 \text{ dan } y = -2$$

Sehingga diperoleh titik dimana akan ditentukan persamaan garis singgung dan garis normalnya adalah $(1,3)$ dan $(1,-2)$

Hitung terlebih dahulu y' dengan menggunakan turunan fungsi implisit

$$D_x(x^2 y^2 - xy - 6) = D_x(0) \iff 2xy^2 + 2x^2 yy' - (y + xy') - 0 = 0$$

$$2xy^2 + 2x^2 yy' - y - xy' = 0$$

$$(2x^2 y - x)y' = y - 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2xy^2}{2x^2 y - x}$$

Di titik (1,3)

$$y'|_{(1,3)} = \frac{3 - 2 \cdot 1 \cdot 9}{2 \cdot 1 \cdot 3 - 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

Persamaan garis singgung

$$y - 3 = -3(x - 1) = -3x + 3$$

$$3x + y = 6$$

Persamaan garis normal

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x - 3y = -8$$

Di titik (1,-2)

$$y'|_{(1,-2)} = \frac{-2 - 2 \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot (-2) - 1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Persamaan garis singgung

$$y + 2 = 2(x - 1) = 2x - 2$$

$$2x - y = 4$$

Persamaan garis normal

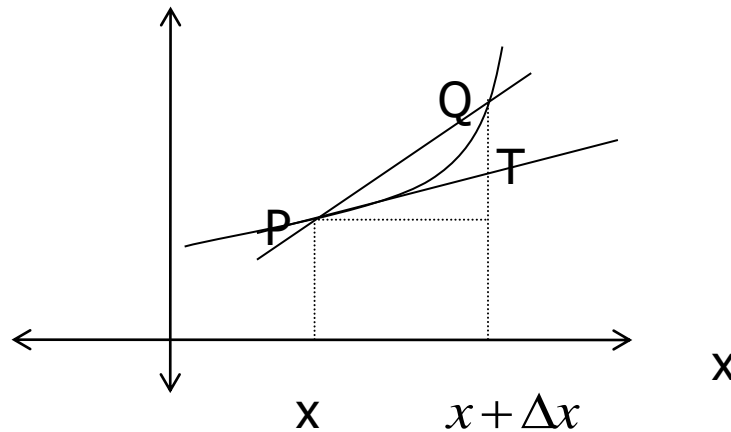
$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x + 2y = -3$$

4.8 Diferensial dan Hampiran

■ 4.8.1 Diferensial

- Jika $f'(x)$ ada, maka
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Untuk Δx sangat kecil, maka $m_{PQ} = m_{PT}$ yakni $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

- **Definisi 4.4** Jika $y = f(x)$ diferensiabel di x , maka Diferensial dari x , dinyatakan dengan dx , adalah $dx = \Delta x$
Diferensial dari y , dinyatakan dengan dy , adalah $dy = f'(x)dx$

4.8.2 Hampiran

- Perhatikan kembali gambar sebelumnya,
- Misalkan $y = f(x)$ diferensiabel di interval I yang memuat x dan $x + \Delta x$. Jika x ditambah Δx , maka y bertambah sepadan dengan Δy yang dapat dihampiri oleh dy .
- Jadi, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$ (*)

■ **Contoh** : Hampiri $\sqrt[3]{28}$

■ **Jawab** : Pandang, $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(27) = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$$

Dengan pers (*)

$$f(28) \approx f(27) + f'(27)(28 - 27) = 3 + \frac{1}{27}$$

Soal Latihan

1. Diketahui kurva yang dinyatakan secara implisit

$$y + \sin(xy) = 1$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal di $(\pi, 1)$

2. Gunakan diferensial untuk menghampiri

a. $\sqrt{10}$

b. $\sqrt{33}$

3. Jika diketahui $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 3$ tentukan $(f \circ g)'(0)$.